4.1. Gleichmässige Stetigkeit

Sind die folgende Funktionen gleichmässig stetig?

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(c) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4.2. Gleichmässige Konvergenz 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : (0, 0.999) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n.$$

(a) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig?

4.3. Gleichmässige Konvergenz 2

Wir betrachten die Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq n \\ x - n, & \text{if } n < x < n+1 \\ 1, & \text{if } n+1 \leq x \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Grenzfunktion $f(x) = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Man betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-R, R]$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge gleichmässig auf $[-R, R]$ konvergiert.

4.4. Zwischenwertsatz

Sei $f : [-2,-1] \cup [1,2] \to \mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$. Kann man schliessen, dass es $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$ existiert, so dass $f(x) = 0$?