

### 6.1. Integrale

Man berechne die folgenden Integrale:

(a)  $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx,$

(c)  $\int x^3 \arctan x dx,$

(b)  $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x} dx,$

(d)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx,$

### 6.2. Tangenssubstitution

Ziel dieser Aufgabe ist die Einführung einer Substitution, welche eine Vielzahl an Integralen trigonometrischer Funktionen löst. Es sei hier stets  $x \in ]-\pi, \pi[$  und wir schreiben:

$$t = t(x) := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

**Hinweis:** Sie dürfen die folgende trigonometrische Identitäten verwenden (Additionstheorem):

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ \sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$t'(x) = \frac{1+t(x)^2}{2}$$

Beachten Sie, dass dies auch zeigt, dass  $t(x)$  eine bijektive, streng monotone Funktion zwischen  $]-\pi, \pi[$  und  $\mathbb{R}$ .

(c) Nutzen Sie die Substitution  $t = \tan(x/2)$  um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx$$

### 6.3. Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen bis auf eine Konstante:

(a)  $\sin(x)^2$

(c)  $\cos(x)e^{\sin(x)}$

(b)  $\sin(x)e^x$

(d)  $\sinh(x)\cos(x)$

**Hinweis:** In einigen Fällen könnte es hilfreich sein, mehrmals partiell zu integrieren.