2.1. Abbildungen

(a) Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(i) von $\{0, 11, 111\}$ nach $\{0, 1\}$?

(ii) von $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\}$ nach $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n^3 \leq 100\}$?

(iii) von $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ in das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$?

(b) Sei $f(x) := x^2 + 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie die folgenden Mengen auf:

1.) $f^{-1}(\{2\})$

2.) $f^{-1}([3, 6))$

3.) $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

(c) Sei $g(x) := 3x + 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1.) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Schreiben Sie g^{-1} explizit auf.

2.) Berechnen Sie:

a) $g^{-1}(0)$

b) $g^{-1}(-10)$

c) $g^{-1}(\frac{3}{2})$

Lösung.

(a) (i) Da die Definitionsmenge mehr Elemente enthält als die Wertemenge, kann es surjektive, aber keine injektiven Abbildungen geben.

(ii) Zunächst berechnet man

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\} = \{1, 3\} \cup \{0, 1\} = \{0, 1, 3\}$$

und

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n^3 \leq 100\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Da die Definitionsmenge weniger Elemente enthält als die Wertemenge, kann es injektive, aber keine surjektiven Abbildungen geben.

(iii) Injektive Abbildungen existieren. Zum Beispiel ist die Funktion

$$2\mathbb{N} := \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto \frac{2}{\pi}\arctan(x)$$

eine injektive Funktion. Es existieren aber keine surjektiven Abbildungen. Wir beweisen dies mit dem Cantor'schen Diagonaltrick. Da $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind ($f(x) = 2x$ definiert eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $2\mathbb{N}$), ist es äquivalent zu zeigen, dass keine surjektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $[0,1]$ existieren.

Sei also $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ eine beliebige Funktion. Schreibe $g(n)$ in Dezimalentwicklung

$$g(n) = 0, a_{1n}\, a_{2n}\, a_{3n}\ \cdots .$$

Die Ziffern a_{kl} sind Zahlen aus $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Betrachte nun die reelle Zahl

$$x = 0, x_1\, x_2\, x_3\ \cdots \in [0,1],$$

wobei $x_n = 4$ falls $a_{nn} = 5$ und $x_n = 5$ falls $a_{nn} \neq 5$ ist. Mit dieser Wahl für x sehen wir, dass $x \neq g(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist x nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.

(b) 1.) $f^{-1}(\{2\}) = 0$

2.) $f^{-1}([3,6)) = (-2,1] \cup [1,2)$

3.) $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]) = \emptyset$

(c) 1.) Um zu zeigen, dass g bijektiv ist, genügt es zu bemerken, dass g ein Invers hat, und zwar

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{5}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2.) Berechnen Sie:

a) $g^{-1}(0) = -\frac{5}{3}$

b) $g^{-1}(-10) = -\frac{10}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{15}{3} = -5$

c) $g^{-1}(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3-10}{6} = -\frac{7}{6}$

2.2. Bild und Urbild

Seien X und Y Mengen und betrachten Sie eine Abbildung $f : X \to Y$. Für eine gegebene Teilmenge B von Y ist das *Urbild von B unter f* die Teilmenge $f^{-1}(B)$ von X, die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge A von X kann man analog den Begriff des *Bilds von A unter f* definieren: sie ist die Teilmenge $f(A)$ von Y, die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(c) Zeigen Sie, dass $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(d) Geben Sie ein Beispiel von f, A und B so dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Lösung.

(a) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

(b) Definitionsgemäss gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,2\} : f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,2\} : x \in f^{-1}(B_i) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

(c) Gemäss Definition gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in A : f(x) = y) \vee (\exists x \in B : f(x) = y) \\ &\Leftrightarrow \quad (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Daher folgt die erste Aussage. Für den zweiten Teil der Aufgabe, beachten Sie, dass für $f : \mathbb{R} \to \{0\}$ mit $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die folgenden Beobachtungen gelten:

$$A \cap B = \emptyset, \quad f(A) \cap f(B) = \{0\}$$

Zumal das Bild der leeren Menge leer ist, haben wir das gewünschte Gegenbeispiel gefunden.

2.3. Supremum und Infimum, I

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der folgenden Mengen. Bestimmen Sie, ob das Supremum (bzw. Infimum) ein Maximum (bzw. Minimum) ist.

1.) $\{\sqrt{x}; x \in [0, \infty[\}$.

2.) $\{\frac{1}{x}; x \in]-\infty, 0[\}$.

3.) $\{\frac{x}{x+1}; x \in [2, \infty[\}$.

4.) $\{-(x-1)^2 - 4; x \in]-3, 3[\}$.

Lösung.

1.) $A := \{\sqrt{x}; x \in [0, \infty[\} = [0, \infty[$, deswegen $\inf A = 0$, $\sup A = \infty$. Das Infimum wird für $x = 0$ angenommen, und ist deshalb ein Minimum. Das Supremum wird nicht angenommen.

2.) $B := \{\frac{1}{x}; x \in]-\infty, 0[\} =]-\infty, 0[$, deswegen $\inf B = -\infty$, $\sup B = 0$. Das Infimum und das Supremum werden nicht angenommen.

3.) $C := \{\frac{x}{x+1}; x \in [2, \infty[\} = [\frac{2}{3}, 1[$, deswegen $\inf C = \frac{2}{3}$, $\sup C = 1$. Das Infimum wird für $x = 2$ angenommen, und ist deshalb ein Minimum. Das Supremum wird nicht angenommen.

4.) $D := \{-(x-1)^2-4; x \in]-3, 3[\} =]-20, -4]$, deswegen $\inf D = -20$, $\sup D = -4$. Das Supremum wird für $x = 1$ angenommen, und ist deshalb ein Maximum. Das Infimum wird nicht angenommen.

2.4. Supremum und Infimum, II

Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$, dann definieren wir

$$A + B := \{a + b; a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Menge $A + B$ für den folgenden Fällen. Bestimmen Sie, ob das Supremum (bzw. Infimum) ein Maximum (bzw. Minimum) ist.

1.) $A = [1, 2]$, $B = [0, 1] \cup [2, 3]$.

2.) $A =]0, 1[$, $B = [-1, 0[$.

3.) $A =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}_0$.

4.) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$.

5.) $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $B = [0, 1]$.

Lösung.

1.) $\min A = 1$, $\max A = 2$; $\min B = 0$, $\max B = 3$, daher $\min A + B = 1$, $\max A + B = 5$.

2.) $\inf A = 0$, $\sup A = 1$; $\min B = -1$, $\sup B = 0$, daher $\inf A + B = -1$, $\sup A + B = 1$. Das Infimum und das Supremum werden nicht angenommen.

3.) $\inf A = 0$, $\sup A = 1$; $\min B = 0$, $\sup B = \infty$, daher $\inf A + B = 0$, $\sup A + B = \infty$. Das Infimum und das Supremum werden nicht angenommen.

4.) $\min A = 1$, $\sup A = \infty$; $\min B = 1$, $\sup B = \infty$, daher $\min A + B = 2$, $\sup A + B = \infty$. Das Supremum wird nicht angenommen.

5.) $\inf A = 0$, $\max A = 1$; $\min B = 0$, $\max B = 1$, daher $\inf A + B = 0$, $\max A + B = 2$. Das Infimum wird nicht angenommen.

2.5. Cauchy-Schwarz

(a) Mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung zeigen Sie: $\forall a, b, c > 0$

$$(a + b + c)^2 \leq \left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}\right)(a(b + c) + b(a + c) + c(a + b))$$

(b) Zeigen Sie, dass $\forall a, b, c > 0$

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$$

(*Hint: zeigen Sie zunächst, dass* $2ab \leq a^2 + b^2$)

(c) benützen Sie a) und b) um zu zeigen, dass $\forall a, b, c > 0$

$$\frac{3}{2} \leq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right)$$

Lösung.

(a) Um die Cauchy-Schwarz Ungleichung zu benützen schreiben wir $a + b + c$ als Skalarprodukt auf:

$$a + b + c = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a}{b+c}} \\ \sqrt{\frac{b}{a+c}} \\ \sqrt{\frac{c}{a+b}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a(b+c)} \\ \sqrt{b(a+c)} \\ \sqrt{c(a+b)} \end{pmatrix}$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung in $\mathbb{R}^3$ ergibt

$$a + b + c \leq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+b} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1}$$

Wenn man auf beider Seiten der Ungleichung (1) den Quadrat nimmt, erhaltet man die gewünschte Ungleichung.

(b) Wir zeigen zunächst, dass $2ab \leq a^2 + b^2 \ \forall a, b \in \mathbb{R}$: seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Deswegen

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

Wenn man die obige Ungleichungen auf (a, b), (b, c) und (a, c) anwendet, erhaltet man

$$ab + bc + ac \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

(c) Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \\ &= a^2+b^2+c^2+a(b+c)+b(a+c)+c(a+b).\end{aligned}$$

Deswegen

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)} = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}+1.$$

Aus Teilaufgabe *b*) folgt, dass

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)} \geq \frac{1}{2}1+1 = \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt, dass

$$\frac{3}{2} \leq \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right).$$

2.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Die Ungleichung $||x-2|-1| < 3$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu...

(i) $x < 3$

(ii) $|x| < 3$

(iii) $0 < x < 2$

(iv) $-2 < x < 6$

(v) $-3 < x < 6$

(b) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist surjektiv,

(iii) g ist injektiv,

(iv) g ist surjektiv,

(v) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(c) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) fg ist gerade.

(ii) fg ist ungerade.

(iii) fg^2 ist gerade.

(iv) $f + g$ ist gerade.

(d) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^4$ ist...

(i) $x^{\frac{1}{4}}$.

(ii) existiert nicht.

(iii) $\frac{1}{4}x$.

(iv) x^{-4}.

(v) $-x^4$.

(e) Seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$. Was ist die Negation der folgenden Aussage?

$$\forall a \in A \ \exists b \in B \text{ so dass } a \leq b$$

(i) $\forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq b$.

(ii) $\forall a \in A \ \exists b \in B$ so dass $a > b$.

(iii) $\exists b \in B$ so dass $\forall a \in A \ a \leq b$.

(iv) $\exists a \in A$ so dass $\forall b \in B \ a > b$.

(v) $\exists a \in A, \ \exists b \in B$ so dass $a > b$.

Lösung.

(a) (iv);

(b) (i), (iv);

(c) (ii), (iii);

(d) (ii);

(e) (iv).