3.1. Komplexe Zahlen

Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Standardform, d.h. in die Form $a + bi$ mit a, b reell:

(a) $(3 + 2i)(6 - 5i)$

(b) $\frac{1}{1+i}$

(c) $\frac{3+4i}{2-i}$

(d) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

(e) $\overline{(1 + i)^2} + (1 + i)^2$

(f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

(g) $(1 + i)^6$ (Hinweis: Polarform verwenden)

Lösung.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(6 - 5i) &= (3 \cdot 6 - 2 \cdot (-5)) + (3 \cdot (-5) + 2 \cdot 6)i \\ &= 28 - 3i\end{aligned}$$

(b) Man bemerke, dass aus $|z|^2 = z\overline{z}$ die Identität $|1 + i|^2 = 2 = (1 + i)(1 - i)$ folgt. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

(c) Analog zur vorherigen Aufgabe finden wir $|2 - i|^2 = 5 = (2 - i)(2 + i)$, daher:

$$\begin{aligned}\frac{3+4i}{2-i} &= \frac{(3+4i)(2+i)}{(2+i)(2-i))} \\ &= \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i\end{aligned}$$

(d) Abermals ergibt sich durch $(1+i)(1-i) = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i\end{aligned}$$

Daher wissen wir:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k = i^k$$

(e) Es gilt generell für komplexe Zahlen $z = a + bi$, a, b reell:

$$\overline{z} + z = (a - bi) + (a + bi) = 2a,$$

das heisst, die Summe ist das Doppelte des Realteils der Zahl. In unserem Fall gilt:

$$(1+i)^2 = 2i,$$

also ist der Realteil gerade 0 und somit finden wir:

$$\overline{(1+i)^2} + (1+i)^2 = 0$$

Eine direkte Berechnung führt zum gleichen Ergebnis.

(f) Dank der binomischen Formeln finden wir:

$$(1 + i\sqrt{3})^3 = 1 + 3 \cdot i\sqrt{3} - 3 \cdot 3 - i3\sqrt{3} = -8.$$

Daher ist das Ergebnis gerade -1.

(g) Wir verwenden die Kartesische Form: $1 + i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(1+i)^6 = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^6 &= r^6\left(\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)\right) \\ &= 8\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -8i;\end{aligned}$$

3.2. Binomische Lehrsatz

In dieser Übung werden wir die binomische Lehrsatz beweisen, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

(a) Bemerken Sie zunächst, dass die Lehrsatz im Fall ist wahr wenn $n = 1$.

Nehmen wir nun an, dass die Lehrsatz für $n = N \in \mathbb{N}$ wahr ist. Wir werden zeigen, dass die Lehrsatz auch für $n = N + 1$ wahr ist.

(b) Anhand der Induktionsannahme zeigen Sie, dass

$$(x+y)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k-1} x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}$$

(d) Schliessen Sie, dass

$$(x+y)^{N+1} = \binom{N}{0} x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right] x^{N+1-k} y^k + \binom{N}{N} y^{N+1}$$

(e) Benützen Sie die Pascal-Identität[1]

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, 1, ..., n\}$$

und die obige Teilaufgaben, um den Beweis der binomischen Lehrsatz abzuschliessen.

Lösung.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Für $n = 1$ $(x+y)^n = x + y$ und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

[1]Sie finden einen Beweis der Pascal-Itentität auf der Wikipedia-Seite "Binomialkoeffizient".

(b) Es gilt

$$(x+y)^{N+1} = x(x+y)^N + y(x+y)^N.$$

Nach Induktionsannahnme gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^{N+1} &= x\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{N-k}y^k + y\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{N-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{N+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{N-k}y^{k+1}.\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{N-k}y^{k+1} = \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k}x^{N-k}y^{k+1} + \binom{N}{N}y^{N+1}.$$

In der Summe auf die rechte Seite ersetzen wir k mit $h = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N}{k}x^{N-k}y^{k+1} = \sum_{h=1}^{N}\binom{N}{h-1}x^{N-h+1}y^h.$$

Damit erhält man

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{N-k}y^{k+1} = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k-1}x^{N+1-k}y^k + \binom{N}{N}y^{N+1}$$

(d) Wenn man den Ausruck aus c) in b) einsetzt, erält man

$$\begin{aligned}(x+y)^{N+1} =& \binom{N}{0}x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}x^{N+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k-1}x^{N+1-k}y^k + \binom{N}{N}y^{N+1} \\ & \binom{N}{0}x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\left[\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}\right]x^{N+1-k}y^k + \binom{N}{N}y^{N+1}.\end{aligned}$$

(e) Nach der Pascal-Identität gilt

$$\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} = \binom{N+1}{k}$$

für jedes $k \in \{1, ..., N\}$. Deswegen folgt aus d), dass

$$(x+y)^{N+1} = \binom{N}{0}x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N+1}{k}x^{N+1-k}y^k + \binom{N}{N}y^{N+1}.$$

Da

$$\binom{N}{0} = \binom{N+1}{0} = 1 \text{ und } \binom{N}{N} = \binom{N+1}{N+1} = 1$$

erhalten wir

$$(x+y)^{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} x^{N+1-k} y^k.$$

Wir haben damit die Aussage für $n = N+1$ gezeigt, unter der Annahme, dass die Aussage für $n = N$ gilt. Da die Aussage für $n = 1$ gilt (Punkt a)) folgt aus vollständiger Induktion, dass die Gleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.3. Polynomen in C

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Betrachten wir das Polynom

$$P(z) := az^2 + bz + c$$

für $z \in \mathbb{C}$. Sei $\sqrt{b^2 - 4ac}$ eine der Quadratwurzeln von $b^2 - 4ac$ (zur Erinnerung: falls $b^2 - 4ac \neq 0$ hat $b^2 - 4ac$ genau zwei unterschiedliche Quadratwurzeln q_1 und q_2 und es gilt $q_1 = -q_2$).
Seien

$$\alpha_+ := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_- := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P(\alpha_+) = 0$ und $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $P(z) = a(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Schliessen Sie daraus, dass die einzige Nullstellen von P α_+ und α_- sind (bemerke, dass möglicherweise $\alpha_+ = \alpha_-$).

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynomen:

a) $z^2 + 6z + 10$

b) $4z^2 + (4i)z - 1$

c) $(z^2 + 1)(z - 3i)^2$

Lösung.

(a) Wir setzen α_+ in P ein:

$$\begin{aligned}
P(\alpha_+) &= a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c \\
&= a\frac{b^2+b^2-4ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{2a}{4a^2}(b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}) + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{1}{2a}(b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}+2ac) = 0.
\end{aligned}$$

Analog zeight man $P(\alpha_-) = 0$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a(z-\alpha_+)(z-\alpha_-) &= a\left(z - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\
&= az^2 + 2az\frac{b}{2a} + a\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = az^2 + baz + c = P(z).
\end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, d.h. $P(z_0) = 0$. Dann $(z_0 - \alpha_+)(z_0 - \alpha_-) = 0$. Es folgt, dass $z_0 - \alpha_+ = 0$ oder $z_0 - \alpha_- = 0$ (da $\mathbb{C}$ ein Körper ist). Deswegen gilt $z_0 = \alpha_+$ oder $z_0 = \alpha_-$.

(c)
a) $-3-i, \quad -3+i$

b) $-\frac{i}{2}$

c) $i, -i, 3i$

3.4. Supremum und Infimum Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und wir definieren:

$$-A := \left\{ -a \;\middle|\; a \in A \right\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$

Lösung. Wir zeigen $\sup(-A) = -\inf A$, die zweite Gleichung folgt komplett analog. Es sei u eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\forall a \in A: \quad u \leq a \Rightarrow -u \geq -a$$

Dies impliziert nun, dass $-u$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Da $\inf A$ eine untere Schranke ist, folgt somit:

$$\sup(-A) \leq -\inf A$$

Sei nun o eine obere Schranke von $-A$. Mit demselben Argument wie oben ist $-o$ eine untere Schranke von A. Daher gilt:

$$-\sup(-A) \leq \inf A \Rightarrow \sup(-A) \geq -\inf A$$

Für die letzten Ungleichung haben wir verwendet, dass die Multiplikation mit -1 die Ungleichung umdreht. Damit können wir nun schliessen:

$$\sup(-A) = -\inf A$$

3.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wie viele verschiedene Nullstellen hat das folgende Polynom?

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z \cdot \left(z^2 + 1\right)^2 - z^2 - z^5$$

- **(i)** 0
- **(ii)** 1
- **(iii)** 3
- **(iv)** 5

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Menge A definiert wie folgt:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2, 4[$$

- **(i)** Existiert nicht.
- **(ii)** 1
- **(iii)** 4
- **(iv)** $+\infty$

(c) Was für eine geometrische Form hat die folgende Menge:

$$M := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c - 1| = 2 \right\}?$$

- **(i)** Ein Quadrat mit den Eckpunkten $(-1,-2), (-1,2), (3,-2)$ und $(3,2)$
- **(ii)** Ein Geradenabschnitt vom Punkt $(-1,0)$ zu $(3,0)$
- **(iii)** Ein Kreis mit Mittelpunkt in i und Radius 2
- **(iv)** Ein Kreis mit Mittelpunkt in 1 und Radius 2

Lösung.

- **(a)** (iii)
- **(b)** (i)
- **(c)** (iv)