4.1. Quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

Es seien $z = a + bi, w = c + di$ komplexe Zahlen mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass:

$$z^2 = w,$$

äquivalent ist zu folgenden Gleichungen:

$$a^2 - b^2 = c, \quad 2ab = d.$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn $z^2 = w$, dann gilt $|w| = a^2 + b^2$.

(c) Wenn $z^2 = w$, beweisen Sie, dass a und b die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c). \tag{1}$$

(d) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen a, b existieren, sodass (1) erfüllt ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass jede nicht-negative Zahl eine Wurzel hat.

(e) Wenn a, b die Gleichungen (1) erfüllen, zeigen Sie, dass auch $a^2 - b^2 = c$ sowie $(2ab)^2 = d^2$ gelten.

(f) Folgern Sie, durch geschickte Wahl der Vorzeichen von a, b, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl z existiert, sodass $z^2 = w$

Lösung.

(a) Es gilt:

$$z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = c + di = w$$

Betrachten wir den Real- und Imaginärteil individuell, so sehen wir:

$$c = a^2 - b^2, \quad d = 2ab$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
|w| &= \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} \\
&= \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} \\
&= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Alternativ folgt dies aus $|w| = \sqrt{\overline{w}w} = \sqrt{\overline{z}^2 z^2} = \sqrt{(\overline{z}z)^2} = \sqrt{|z|^4} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

(c) Wir haben das Gleichungssystem:

$$a^2 + b^2 = |w|$$
$$a^2 - b^2 = c$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so finden wir:

$$2a^2 = |w| + c \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c)$$

Analog, subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung, so sehen wir:

$$2b^2 = |w| - c \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c)$$

(d) Es reicht zu zeigen, dass $|c| \leq |w|$. Der Grund hierfür ist, dass dann $|w| \pm c \geq 0$ und somit eine reelle Wurzel (bzw. sogar zwei) existiert. Betrachten wir nun $|w|$, so sehen wir aufgrund der Monotonie der Wurzel:

$$|w| = \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{c^2} = |c|,$$

was die gewünschte Ungleichung ist.

(e) Man beachte, dass wenn a, b wie in der Aufgabe existieren, so gilt:

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}(|w| + c) - \frac{1}{2}(|w| - c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$$

Ferner sehen wir mittels binomischer Formeln, dass:

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(|w| + c) \cdot \frac{1}{2}(|w| - c) = |w|^2 - c^2 = c^2 + d^2 - c^2 = d^2.$$

Damit sind die gewünschten Identitäten bewiesen.

(f) Aus der vorherigen Teilaufgabe folgt, dass entweder $2ab = d$ oder $2ab = -d$. Im ersten Fall haben wir eine Wurzel gefunden. Im zweiten Fall bemerken wir, dass wir problemlos $-a$ bzw. $-b$ statt a bzw. b verwenden können, da diese noch immer Gleichung (1) erfüllen. Dann gilt aber $2(-a)b = -2ab = -(-d) = d$. Somit haben wir eine Wurzel im zweiten Fall gefunden. Man beachte, dass zwei Wurzeln existieren und man beide durch Wechsel des Vorzeichens von a und b zugleich erhalten kann.

4.2. Faktorisierung von Polynomen in $\mathbb{C}$

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jedes Polynom

$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_a z + a_0$$

als Produkt von Monomen geschriben werden kann:

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j),$$

wobei z_j für $j \in \{0, \ldots, n\}$ die Nullstellen des P sind (erinnern Sie sich, dass diese Nullstellen nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren).

(a) Sei $w = z - z_1$ und sei

$$Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad Q(w) = P(w + z_1).$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Binomialformel, dass Q ein Polynom ist, die folgende Form hat:

$$Q(w) = w^n + b_{n-1}w^{n-1} + \ldots b_1 w$$

(das heisst, die Koeffizient von w^0 ist Null).

(b) Schliessen Sie aus Teil (a), dass wir P als $P(z) = R(z)(z - z_1)$ schreiben können, wobei R ein Polynom ist.

(c) Beweisen Sie mit Induktion, dass $P(z) = \prod_{j=1}^{m}(z - z_j)$.

Lösung.

(a) Wir ersetzen w im Ausdruck für P und verwenden die Binomialformel:

$$\begin{aligned} Q(w) &= P(w+z_1) \\ &= (w+z_1)^n + a_{n-1}(w+z_1)^{n-1} + \cdots + a_1(w+z_1) + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{n-k} z_1^k + \binom{n}{n} w^0 z_1^n + \\ &\quad + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} w^{n-1-k} z_1^k + a_{n-1} \binom{n-1}{n-1} w^0 z_1^{n-1} \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + a_1 w + a_1 z_1 \\ &\quad + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{n-k} z_1^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} w^{n-1-k} z_1^k + \cdots + a_1 w \\ &\quad + \underbrace{z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0}_{=P(z_1)=0} \end{aligned}$$

(b) Da

$$Q(w) = w \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{n-k-1} z_1^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} w^{n-k-2} z_1^k + \cdots + a_1 \right),$$

erhalten wir mit der Substitution $w + z_1 = z$

$$\begin{aligned} P(z) &= Q(z-z_1) \\ &= (z-z_1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (z-z_1)^{n-k-1} z_1^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} (z-z_1)^{n-k-2} z_1^k + \cdots + a_1 \right). \end{aligned}$$

(c) Der Basisschritt der Induktion wurde in Teil (b) gezeigt. Wir nehmen an, dass P die Form $P(z) = S(z) \prod_{j=1}^{m-1}(z - z_j)$ für $1 \leq m < n$ hat und wir zeigen, dass $P(z) = T(z) \prod_{j=1}^{m}(z - z_j)$, wobei T ein Polynom ist.

Zuerst schreiben wir

$$S(z) = z^{n-m} + c_{n-m-1} z^{n-m-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

wobei $c_j \in \mathbb{R}, j \in \{0, \ldots, n-m\}$. Dann definieren wir $R(w) = S(w + z_{m+1})$. Mit der Substitution $w = z - z_{m+1}$ und mit dem gleichen Argument wie in Teil

(b) schliessen wir, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}S(z) &= R(z-z_{m+1})\\ &= (z-z_{m+1})\left(\sum_{k=0}^{n-m-1}\binom{n-m}{k}(z-z_1)^{n-m-k-1}z_1^{k-1}\right.\\ &\qquad\left.+\,c_{n-m-1}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-m-1}{k}(z-z_1)^{n-m-k-2}z_1^{k}+\cdots+c_1\right).\end{aligned}$$

Wir nennen

$$\begin{aligned}T(z) = \left(\sum_{k=0}^{n-m-1}\binom{n-m}{k}(z-z_1)^{n-m-k-1}z_1^{k-1}\right.\\ \left.+\,c_{n-m-1}\sum_{k=0}^{n-m-2}\binom{n-m-1}{k}(z-z_1)^{n-m-k-2}z_1^{k}+\cdots+c_1\right)\end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$P(z) = T(z)\prod_{j=1}^{m}(z-z_j).$$

Wir schliessen daraus, dass

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}\widetilde{T}(z)(z-z_j),$$

wobei $\widetilde{T}$ ein Polynom ist. Da sowohl P als auch $\widetilde{T}$ vom Grad n sind, muss $\widetilde{T}$ eine Konstante sein. Da der Koeffizient von z^n gleich 1 ist, muss diese Konstante auch 1 sein.

4.3. Produkt von Folgen Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (d.h. $\exists\quad C > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ $|b_n| \leq C$).
Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\exists\quad N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ gilt $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{C}$. Dann für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ gilt $|a_n b_n| \leq |a_n||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{C}C = \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war schliessen wir, dass $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

4.4. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2}$,

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5}$,

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(d) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sin(n)}{2^n} + \frac{\cos(n)}{n^4}\right)$.

Hint: *Für d) benützen Sie Aufgabe (Produkt von Folgen)*

Lösung.

(a) Wir kürzen Zähler und Nenner mit n^2 und finden:

$$\frac{n^2-n+3}{n^2+2} = \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

Nutzen wir nun Satz 3.3.2, so sehen wir aufgrund der Tatsache, dass $1/n, 1/n^2$ Nullfolgen sind:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2} &= \frac{\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

(b) Wir sehen sofort:

$$\frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} = \frac{\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{1+\frac{5}{2^n n^2}}$$

Aus Satz 3.3.2. folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{1+\frac{5}{2^n n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{5}{2^n n^2}} \\ &= \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

Da $1/n^2$ eine Nullfolge ist, erwarten wir als Grenzwert 1. Wir wollen also nun den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1 &= \frac{(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1)(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}\\ &= \frac{1-\frac{1}{n^2}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}\\ &= \frac{-1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)}\end{aligned}$$

Wir betrachten, dass $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1 \geq 1$, daher finden wir:

$$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right| = \frac{1}{n^2(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Dank Teil (v) des Satzes III.3.3 aus der Vorlesung am 13.10.2022. folgt nun die gewünschte Konvergenz und wir haben:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = 1.$$

(d) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Da die Folgen $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind, folgt aus Aufgabe 4.2 dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cos(n)}{2^n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$. Darum folgt, dass $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\sin(n)}{2^n}+\frac{\cos(n)}{n^4}\right) = 0$.

4.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{16n^3+100n+1000000}{27n^3+10920n+2020}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

- **(iii)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{16}{27}$
- **(iv)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{4}{9}$
- **(v)** Konvergiert, mit Grenzwert 1000000

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^2}{2^n n^2 + 8}$$

- **(i)** Divergiert, d.h. keine Konvergenz
- **(ii)** Konvergiert, mit Grenzwert 0
- **(iii)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{2}$
- **(iv)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{4}$
- **(v)** Konvergiert, mit Grenzwert 1

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^3 + 22n^2 - 10}{29n^2 - 27n + 8}$$

- **(i)** Divergiert, d.h. keine Konvergenz
- **(ii)** Konvergiert, mit Grenzwert 0
- **(iii)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{29}$
- **(iv)** Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{22}{29}$
- **(v)** Konvergiert, mit Grenzwert 29

Lösung.

(a) (iii)

(b) (ii)

(c) (i)