5.1. Häufungspunkte Explizit Bestimmen

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Folgen reeller Zahlen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := (-1)^n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{(1+(-1)^n)n^3}{n^2-n+1}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

Hinweis: Ein *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zahl, welche der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Lösung.

(a) Die Teilfolgen $b_n = a_{2n} = 1$ und $c_n = a_{2n-1}$ sind konstant und konvergieren gegen 1 und -1. Damit sind dies Häufungspunkte. Da jede Teilfolge nur die Werte 1 und -1 annehmen kann, sind dies zugleich alle Häufungspunkte.

(b) Durch Kürzen finden wir:

$$a_n = \frac{n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Sowohl Zähler als auch der Nenner konvergieren gegen 1, damit konvergiert die gesamte Folge auch gegen 1 dank Proposition 2.5.9. Eine konvergente Folge hat aber gerade einen Häufungspunkt, denn jede Teilfolge konvergiert per Definition ebenfalls gegen den gleichen Grenzwert. Daher ist 1 der einzige Häufungspunkt, da jede konvergente Teilfolge nach endlich viel Gliedern nur noch konstant 1 oder -1 sein kann (da sonst der Abstand zwischen zwei Folgeglieder immer mal wieder ≥ 2 wäre).

(c) Die Teilfolge $b_n = a_{2n-1} = 0$ ist konstant und damit konvergent mit Grenzwert 0. Daher ist 0 ein Häufungspunkt. Beachten wir, dass $c_n := a_{2n}$ unbeschränkt ist wegen:

$$c_n = \frac{2(2n)^3}{(2n)^2 - (2n) + 1},$$

genauer, der Zähler ist ein Polynom vom Grad 3, während der Nenner nur Grad 2 hat. Es sei nun (d_n) eine konvergente Teilfolge. Dann kann (d_n) nur endlich viele gemeinsame Glieder mit (c_n) haben, da jede konvergente Folge beschränkt ist. Somit muss (d_n) alle bis auf endlich viele Glieder mit (b_n) gemeinsam haben. Da (b_n) aber konvergiert mit Grenzwert 0, muss auch (d_n) eine Nullfolge sein. Somit ist 0 der einzige Häufungspunkt.

(d) Wir beweisen zuerst:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Dies folgt per Induktion. Für $n = 1$ ist die Identität offensichtlich, nehmen wir nun also an, dass die Gleichung für ein n gilt. Dann sehen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2}$$

Mit den Resultaten aus der Vorlesung folgt, dass die Folge somit gegen $1/2$ konvergiert und dies daher der einzige Häufungspunkt ist, wie bereits zuvor erklärt.

5.2. Unendlich viele Häufungspunkte

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die folgende Formel:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}: 2^k \leq n < 2^{k+1} \;\Rightarrow\; a_n := \frac{n-2^k}{2^k}$$

Als Beispiel, hier sind die ersten Folgeglieder:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{4}, a_6 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{3}{4}, \ldots$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

(a) Sei $r \in [0,1]$. Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \; \exists n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ so dass

$$\left|\frac{n-2^k}{2^k} - r\right| \leq \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

(b) Sei r wie in (a), $\forall k \in \mathbb{N}_0$ sei $b_k^r = \frac{n_k - 2^k}{2^k}$, wo n_k das kleinste Element in $\{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ ist, welches Bedingung (1) erfüllt.
Zeigen Sie: $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$.

(c) Sei $s \in [0,1]^c$ (zur Erinnerung: $[0,1]^c = \{r \in \mathbb{R}; r \notin [0,1]\}$). Zeigen Sie, dass s kein Haüfungpunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(d) Schliessen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

Lösung.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn $n = 2^k$, $\frac{n-2^k}{2^k} = 0$ und wenn $n = 2^{k+1}-1$, $\frac{n+1-2^k}{2^k} = 1$. Deswegen für jedes $r \in [0,1]$, $\exists n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ so dass

$$\frac{n-2^k}{2^k} \leq r \leq \frac{n+1-2^k}{2^k}.$$

Für solches n gilt

$$\left| r - \frac{n-2^k}{2^k} \right| \leq \frac{n+1-2^k}{2^k} - \frac{n-2^k}{2^k} = \frac{1}{2^k}.$$

(b) Zunächst bemerken wir, dass $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$. Deswegen folgt aus Bedingung (1), dass $\lim_{k\to\infty} \left(r - \frac{n-2^k}{2^k} \right) = 0$. Daher $\lim_{k\to\infty} \frac{n-2^k}{2^k} = r$.

(c) Wir bemerken, dass $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\forall n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$

$$0 \leq \frac{n-2^k}{2^k} \leq 1.$$

Dann falls $s > 1$ gilt $|s - a_n| \geq s - 1 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ähnlicherweise, falls $s < 0$ gilt $|a_n - 2| \geq -s > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wir schliessen, dass ein Punkt $s \in [0,1]^c$ kein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein kann.

(d) Sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}; \quad x \text{ ist Häufungspunkt der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Aus Punkt (c) folgt, dass $H \subset [0,1]$.
Sei nun $r \in [0,1]$. Aus Punkt (b) folgt, dass $\exists$ Teilfolge $(b_k^r)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$, deswegen ist r ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $r \in H$. Da $r \in [0,1]$ beliebig war, schliesen wir, dass $[0,1] \subset H$, deswegen $[0,1] = H$.

5.3. Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

Lösung. Mit der dritten binomischen Formel folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

5.4. Supremum und Konvergenz

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in A$ sowie $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

Lösung. Wir definieren die Folge quasi-induktiv durch geschickte Wahl der Folgeglieder: Es sei $a = \sup A$. Dann gilt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für A sein kann. Daher gibt es ein a_n, sodass:

$$a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$$

Indem wir dies für alle natürlichen Zahlen machen, finden wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wollen nun zeigen, dass diese gegen a konvergiert. Beachte, dass $|a_n - a\ | = a - a_n$, da alle Folgeglieder in A liegen. Somit gilt also:

$$|a_n - a| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Gemäss Lemma 2.5.8 gilt also die gewünschte Konvergenz.

Alternativ lässt sich das Resultat auch mittels einer monoton wachsenden Folge beweisen.

5.5. Konvergenzkriterium

Zeigen Sie, dass eine beschränkte Folge konvergiert genau dann wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

und dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Lösung. Siehe Lemma 3.4.1 und Bemerkung 3.4.2 im Skript.

5.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch
- **(iii)** Kann man nicht sagen.

(b) Wenn die Folge (a_n) divergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch
- **(iii)** Kann man nicht sagen.

(c) Eine Folge (a_n) mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch
- **(iii)** Kann man nicht sagen.

(d) Eine beschränkte Folge (a_n), welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch
- **(iii)** Kann man nicht sagen.

(e) Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch
- **(iii)** Kann man nicht sagen

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii)

(c) (ii)

(d) (i)

(e) (i)