

### 6.1. Alternierende Reihen

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende, reelle Nullfolge, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  sei

$$S_N := \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n.$$

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ .
- (b) Zeigen Sie, dann die Folge  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist.
- (c) Zeigen Sie, dann die Folge  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist.
- (d) Zeigen Sie, dass  $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$S_{2n+1} \leq S_k \leq S_{2n} \quad \forall k \geq 2n + 1.$$

- (e) Zeigen Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}$  existieren.
- (f) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}$$

- (g) Schliessen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergiert.

### Lösung.

- (a) Nehmen wir zur Widerspruch an, dass  $a_N < 0$  für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, folgt dass  $a_n \leq a_N \forall n \geq N$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_N < 0$ , ein Widerspruch.
- (b) Sei  $n \leq m$ . Dann

$$S_{2m} - S_{2n} = \sum_{k=n}^{m-1} (-a_{2k+1} + a_{2k+2}) \tag{1}$$

Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, gilt  $-a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0 \forall k \in \{n, n+1, \dots, m-1\}$ , deswegen folgt aus (1), dass  $S_{2m} \leq S_{2n}$ .

- (c) Sei  $n \leq m$ . Dann

$$S_{2m+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=n+1}^m (a_{2k} - a_{2k+1}) \tag{2}$$

Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, gilt  $a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0 \forall k \in \{n+1, n+2, \dots, m\}$ , deswegen folgt aus (2), dass  $S_{2m+1} \geq S_{2n+1}$ .

- (d) Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und sei  $k \geq 2n + 1$ . Falls  $k$  ungerade ist, schreiben wir  $k = 2m + 1$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Dann folgt aus c), dass  $S_k \geq S_{2n+1}$ . Ausserdem gilt

$$S_{2m+1} = S_{2n} + \sum_{l=n}^{m-1} (-a_{2l+1} + a_{2l+2}) - a_{2m+1} \leq S_{2n}$$

da  $-a_{2l+1} + a_{2l+2} \leq 0 \forall l \in \{n, n+1, \dots, m-1\}$  und  $a_{2m+1} \geq 0$ .

Falls  $k$  gerade ist, schreiben wir  $k = 2m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Dann folgt aus b), dass  $S_k \leq S_{2n}$ . Ausserdem gilt

$$S_{2m} = S_{2n+1} + \sum_{l=n+1}^{m-1} (a_{2l} - a_{2l+1}) + a_{2m} \geq S_{2n+1},$$

da  $a_{2l} - a_{2l+1} \geq 0 \forall l \in \{n+1, n+2, \dots, m-1\}$  und  $a_{2m} \geq 0$ .

- (e) Die Folge  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist nach b) monoton fallend, und nach d) gilt  $S_{2n} \geq S_1 \forall n \in \mathbb{N}$ . Deswegen besitzt die Folge  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  ein Limes.  
Analog, die Folge  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  ist nach c) monoton wachsend, und nach d) gilt  $S_{2n+1} \leq S_0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Deswegen besitzt die Folge  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  ein Limes.

- (f)  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}. \tag{3}$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ , wenn man das Limes für  $n \rightarrow \infty$  in (3) nimmt erhält man  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ .

- (g) Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$  existieren und gleich sind, folgt aus d), dass

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} S_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

darum  $\limsup_{k \rightarrow \infty} S_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} S_k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$  existiert. Deswegen konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ .

## 6.2. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ ,

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ ,

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

*Hinweis:* Für (c) benützen Sie Aufgabe 6.1.

**Lösung.**

(a) Dank Proposition 2.10.14 wissen wir, dass diese Reihe konvergiert, denn  $|3| = 3 > 1$ .

(b) Wir sehen, dass für  $n \geq 6$  gilt:

$$\frac{1}{2}n^2 = n^2 - \frac{n}{2}n \leq n^2 - 3n + 1 \leq 5n^2$$

Die Bedingung  $n \geq 6$  wurde gewählt, sodass  $\frac{n}{2} \geq 3$ . Somit gilt also für  $n \geq 6$ :

$$\frac{2}{n} = \frac{2n}{n^2} \geq \frac{n+4}{n^2-3n+1} \geq \frac{n+4}{5n^2} = \frac{1}{5n} + \frac{4}{5n^2}$$

Da alle Reihenglieder positiv ist, wäre gemäss Theorem 2.10.5 Konvergenz äquivalent zur Beschränktheit der Partialsummen. Es gilt aber:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{5n} + \frac{4}{5n^2} \leq \sum_{n=1}^N \frac{n+4}{n^2-3n+1},$$

wobei aber gemäss Proposition 2.10.14 die Partialsummen auf der linken Seite der Ungleichung unbeschränkt sind. Daher muss die Reihe divergieren.

(c) Wir bemerken, dass:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert. Daher gilt nach Aufgabe 6.1, dass die Reihe konvergiert.

**6.3. Eulersche Zahl I**

(a) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge gegeben durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist, und dass  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 2$ .

**Hinweis:** Sie dürfen die Bernoullische Ungleichung benutzen:  $(1+x)^n \geq 1+nx$   $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$  und  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge gegeben durch

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, und dass  $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq 4$ .

**Hinweis:** Sie dürfen wieder die Bernoulli'sche Ungleichung benutzen, wie auch die Ungleichung  $\frac{n}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

(c) Bemerken Sie, dass  $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  und schliessen Sie aus den obigen Teilaufgaben, dass  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existieren, und dass  $a \leq b$ .

(d) Zeigen Sie, dass  $a = b$ .

**Hinweis:** Benützen Sie die Abschätzung  $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Das Limes  $e := a = b$  heisst Eulersche Zahl.

**Lösung.** Sehen Sie Beispiel 3.3.2 ii) im Vorlesungsskript.

#### 6.4. Exponentialfunktion I

Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  sei

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Aus Beispiel 3.7.2 i) folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

Seien  $x, y \in \mathbb{C}$ .

(a) Zeigen Sie, dass

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right).$$

**Hinweis:** Sie dürfen Satz 3.8.2 benutzen.

(b) Benützen Sie Punkt a) und den binomischen Lehrsatz um zu schliessen, dass

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \text{Exp}(x + y).$$

**Lösung.**

(a) Aus Satz 3.8.2 folgt, dass

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} = \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k! l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k! l!} \right).$$

Für jedes  $l, k \in \mathbb{N}_0$  sei  $n_k(l) = l + k$ . Dann ist  $n_k$  eine Bijektion zwischen  $\mathbb{N}_0$  und  $\{k, k + 1, \dots\}$  und für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k! l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^{(n_k(l)-k)}}{k! (n_k(l) - k)!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!}.$$

Daher

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!} \right).$$

(b) Aus der binomischen Lehrsatz folgt, dass

$$\text{Exp}(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!},$$

da  $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!}.$$

Nun

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\leq}(k, n) \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\leq}(k, n) \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k! (n - k)!} \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbb{1}_{\leq}(k, n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Deswegen folgt aus (a), dass

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \text{Exp}(x + y).$$

## 6.5. Quotientenkriterium

Bestimmen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums ob die folgende Reihen konvergieren oder nicht:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{1-2n}}{n^2 + 1}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1+3n}(n+1)}{n^2 3^n}$$

**Lösung.**(a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  berechnen wir:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)},$$

wenn wir die Definition der Fakultät zum Kürzen verwenden. Somit gilt aber:

$$\left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| \leq \left| \frac{n+1}{2(2n+1)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Daher folgt nach dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert.

(b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  berechnen wir:

$$\frac{2^{1-2(n+1)}}{(n+1)^2 + 1} \frac{n^2 + 1}{2^{1-2n}} = 2^{-2} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2}.$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2} = 1$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{1-2(n+1)}}{(n+1)^2 + 1} \frac{n^2 + 1}{2^{1-2n}} \right| = \frac{1}{4}.$$

Daher folgt nach dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert.

(c) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  berechnen wir:

$$\frac{2^{1+3(n+1)}(n+2)}{(n+1)^2 3^{n+1}} \frac{n^2 3^n}{2^{1+3n}(n+1)} = \frac{2^3}{3} \frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+1)}.$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = 1$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1+3(n+1)}(n+2)}{(n+1)^2 3^{n+1}} \frac{n^2 3^n}{2^{1+3n}(n+1)} = \frac{8}{3}.$$

Daher folgt nach dem Quotientenkriterium, dass die Reihe nicht konvergiert.

## 6.6. Online-MC

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

(a) Sei  $a_n$  definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k + 1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k + 2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k + 3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existiert.
  - (ii)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  existiert.
  - (iii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$
- (b) Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge. Die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $b_n = \sup_{k \geq n} a_k$ , ist fallend und die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $c_n = \inf_{k \geq n} a_k$ , ist wachsend.
- (i) Wahr
  - (ii) Falsch
  - (iii) Kann man nicht sagen
- (c) Die Harmonische Reihe  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  ist
- (i) Konvergent

(ii) Divergent

**Lösung.**

(a) (ii)

(b) (i)

(c) (ii)