7.1. Eulersche Zahl II

Erinnern Sie sich, dass

$$Exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

für $z \in \mathbb{C}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$ sei

$$a_k^{(n)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$ $\forall k, n \in \mathbb{N}$, und dass für fixes $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}.$$

Schliessen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq Exp(1).$$

Hinweis: *Benützen Sie den binomischen Lehrsatz.*

(c) Sei $\varepsilon > 0$ Zeigen Sie: $\exists n_\varepsilon^0, n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon^0 \leq n_\varepsilon^1$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon^0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > Exp(1) - \varepsilon,$$

und $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon^1$

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) \leq \varepsilon.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon^1$

$$\left| Exp(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| < 2\varepsilon.$$

(e) Schliessen Sie, dass

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = Exp(1).$$

Lösung.

(a) Für jedes $l \in \{0, ..., k-1\}$ gilt $0 \leq n-l \leq n$, deswegen $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$. Für jedes $l \in \{0, ..., k-1\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-l}{n} = 1,$$

deswegen

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)},$$

daher

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n} = 1$$

(b) Aus der binomischen Lehrsatz folgt, dass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)}.$$

Insbesonders

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = Exp(1).$$

(c) Da

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = Exp(1),$$

es existiert $n_\varepsilon^0 \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > Exp(1) - \varepsilon.$$

Da für jedes $k \in \{1, ..., n_\varepsilon^0\}$

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(n)} = 1,$$

es existiert $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1$, für jedes $k \in \{1, ..., n_\varepsilon^0\}$

$$|1 - a_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon^0 + 1}$$

und deswegen

$$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} (1 - a_k^{(n)}) < \varepsilon.$$

Insbesonders kann man n_ε^1 so wählen, dass $n_\varepsilon^1 \geq n_\varepsilon^0$.

(d) Aus (c) folgt, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon^1 \geq n_\varepsilon^0$

$$\begin{aligned}
0 &\leq Exp(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a_k^{(n)} \\
&\leq Exp(1) - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} a_k^{(n)} \\
&\leq \left| Exp(1) - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon^0} \frac{1}{k!} \left(1 - a_k^{(n)}\right) \right| \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

(e) Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt aus (d), dass

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = Exp(1).$$

7.2. Exponentialfunktion II

(a) Zeigen Sie, dass $Exp(n) = e^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: *Benützen Sie Aufgabe 6.4. Betrachten Sie zunächst die Fälle $n \in \mathbb{N}$ und $n = 0$.*

(b) Zeigen Sie, dass $Exp(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{Q}$.

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst, dass*

$$Exp\left(\frac{p}{q}\right) = \left(Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p\right)$$

$\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Lösung.

(a) Aus Serie 6 folgt (zum Beispiel mittels vollständiger Induktion), dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$Exp(1)^n = Exp(n).$$

Nun

$$Exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 = e^0$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$Exp(-n) \cdot Exp(n) = Exp(0) = 1,$$

deswegen

$$Exp(-n) = Exp(n)^{-1} = e^{-n}.$$

(b) $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ folgt aus Aufgabe 4, dass

$$Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p = Exp\left(\frac{p}{q}\right)$$

(das kann man wieder mittels vollständiger Induktion bezüglich p zeigen) und insbesonders

$$Exp\left(\frac{1}{q}\right)^q = Exp(1) = e.$$

Daher

$$Exp\left(\frac{p}{q}\right) = Exp\left(\frac{1}{q}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p = e^{\frac{p}{q}}.$$

7.3. Zwischenwertsatz

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, es gelte: $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass $\exists c \in [0, 1/2]$ mit:

$$f\Big(c + \frac{1}{2}\Big) = f(c)$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x + 1/2) - f(x)$. Wenden Sie den Zwischenwertsatz an.

Lösung. Wir definieren die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$g(x) := f\Big(x + \frac{1}{2}\Big) - f(x), \quad \forall x \in [0, 1/2]$$

Es reicht also zu zeigen, dass ein $c \in [0,1]$ existiert mit $g(c) = f(c + 1/2) - f(c) = 0$. Dazu betrachten wir die Randwerte:

$$g(0) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) - f(0), \quad g\Big(\frac{1}{2}\Big) = f(1) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\Big(f\Big(\frac{1}{2}\Big) - f(0)\Big) = -g(0),$$

wobei wir $f(0) = f(1)$ verwendet haben. Wenn $g(0) = 0$, dann ist nichts zu beweisen. Falls $g(0) \neq 0$, so nimmt g gemäss des Zwischenwertsatzes den Wert 0 an einer Stelle

$c \in [0, 1/2]$ an, zumal g positive und negative Werte annimmt. Somit ist der Beweis abgeschlossen.

7.4. Stückweise stetige Funktionen, Teil 1

Es seien $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ und $f_2 :]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Wir definieren dann eine weitere Funktion f wie folgt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{wenn } x \geq 0 \\ f_2(x), & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass falls $f_1(0) \neq f_2(0)$, dann ist f unstetig.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $f_1(0) = f_2(0)$, dann ist f stetig.

(c) Wir betrachten die Funktion:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) := \begin{cases} x^2 + 3, & \text{wenn } x < 0 \\ cx + d, & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - x + 4, & \text{wenn } 1 \leq x \end{cases}$$

Wie müssen $c, d \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f stetig ist?

Lösung.

(a) Wir heben zuerst hervor, dass Stetigkeit eine *lokale Eigenschaft* ist, das heisst, ob eine Funktion stetig ist oder nicht in einem Punkt hängt lediglich von den Werten in der Nähe des Punktes ab. Dies lässt sich leicht aus Proposition 3.2.10 herauslesen. Dadurch ist klar, dass f sicher in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ stetig ist, denn wenn (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x ist, so folgt wegen $x > 0$ bzw. $x < 0$ auch, dass $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n > 0$ bzw. $a_n < 0$. Das bedeutet, dass für $n \geq N$ gilt $f(a_n) = f_1(a_n)$ bzw. $f(a_n) = f_2(a_n)$. Da aber f_1 und f_2 stetig sind, folgt somit die gewünschte Konvergenz und daher Stetigkeit in $x \neq 0$ dank Proposition 3.2.10.

Es reicht also, das Verhalten von f nahe 0 zu betrachten. Falls $f_1(0) \neq f_2(0)$, so wählen wir $a_n = -1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von f_2 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(a_n) = f_2(0) \neq f_1(0) = f(0),$$

da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dies zeigt gemäss Proposition 3.2.10, dass f unstetig in 0 ist.

(b) Analog zur vorherigen Aufgabe reicht es, $x = 0$ zu begutachten. Es $\varepsilon > 0$ gegeben und dank der Stetigkeit von f_1 und f_2 wissen wir, dass $\delta_1, \delta_2 > 0$ existieren, sodass:

$$|f_1(x) - f_1(0)| < \varepsilon,$$

falls $x \geq 0$ sowie $|x| < \delta_1$ und analog:

$$|f_2(x) - f_2(0)| < \varepsilon,$$

für alle $x \leq 0$ mit $|x| < \delta_2$. Mit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ finden wir also für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$:

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon,$$

dank $f_1(0) = f_2(0)$. Daher ist f stetig in $x = 0$.

(c) Gemäss unserer vorherigen Betrachtungen, welche sich leicht auf die gegenwärtige Situation ausdehnen lassen, müssen wir nur noch prüfen:

$$0^2 + 3 = 3 = d = c \cdot 0 + d,$$

was Stetigkeit in 0 ergibt sowie:

$$c \cdot 1 + d = c + d = 4 = 1^3 - 1 + 4,$$

was Stetigkeit in 1 ergibt. Zusammen sind dies die Gleichungen:

$$d = 3, c + d = c + 3 = 4 \Rightarrow c = 1, d = 3$$

Somit ist $c = 1$, $d = 3$ die einzige Lösung.

7.5. Stetige Funktionen

Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig sind

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{wenn } x \neq 2 \\ 8 & \text{wenn } x = 2, \end{cases}$

(b) $f(x) = \frac{1}{e^x-2}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache benützen, dass die Sinusfunktion stetig ist.*

Lösung.

(a) Für $x \neq 2$ es gilt
$$\frac{x^3 - 4x}{x - 2} = x^2 + 2x.$$
Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x$ ist ein Polynom, deswegen ist stetig auf $\mathbb{R}$. Es gilt $g(2) = 8$, dann $f = g$ auf $\mathbb{R}$. Es folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Die Funktion f ist für $x = \log(2)$ nicht definiert, also ist f keine Funktion auf $\mathbb{R}$.

Wenn wir die Funktion f nur auf die Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\log(2)\}$ betrachen, ist f stetig, da $g(x) = e^x - 2$ stetig ist und da auf $\mathbb{R} \setminus \{\log(2)\}$ die Funktion g nicht null ist.

(c) Zunächst bemerken wir, dass f auf $(\infty, 0]$ und auf $(0, \infty)$ als Produkt von stetigen Funktionen stetig ist. Um zu zeigen, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, genügt es zu zeigen, dass
$$\lim_{x \to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$
Dafür bemerken wir, dass die Sinusfunktion durch 1 beschänkt ist. Deswegen gilt
$$\lim_{x \to 0^+} \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \lim_{x \to 0^+} |x| = 0.$$
Wir schliessen, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

7.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist stetig.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(b) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede stetige, surjektive Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ ist monoton.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(c) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es existiert eine surjektive stetige Funktion $f : [a, b] \to]c, d[$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Ist die folgende Funktion stetig?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

Lösung.

(a) (ii)

(b) (ii)

(c) (ii)

(d) (ii)