8.1. Streng monoton wachsende stetige Funktionen

Man definiert den Sinus hyperbolicus als

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Zeigen Sie, dass sinh stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass sinh streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$.

(d) Schliessen Sie, dass sinh bijektiv ist, und dass $\sinh^{-1}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Die Funktion $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Areasinus hyperbolicus*, und wird als arsinh geschrieben.

Lösung.

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktion $Exp(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Da auf jedem Intervall (a, b) (für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) $Exp(x)$ von unten durch eine positive Zahl beschränkt ist, ist auch $Exp(-x) = \frac{1}{Exp(x)}$ in $\mathbb{R}$ stetig. Dann ist sinh als Linearkombination von stetigen Funktionen auch stetig.

(b) Aus der Vorlesug ist bekannt, dass $Exp(x)$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. Deswegen ist $Exp(-x) = \frac{1}{Exp(x)}$ streng monoton follend. Dann ist $-Exp(-x)$ streng monoton wachsend, daher ist sinh als Summe von zwei streng monoton wachsende Funktionen auch streng monoton wachsend.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x\to\infty} Exp(x) = \infty$ und dass $\lim_{x\to-\infty} Exp(x) = 0$. Deswegen gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} Exp(x) - \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} Exp(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} Exp(x) = \infty.$$

Ähnlicherweise gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)) = \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} Exp(x) - \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} Exp(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} Exp(x) = -\infty.$$

(d) Da sinh stetig und streng monoton wachsend ist, folgt aus der Erweiterung des Satzes 4.6.2, dass sinh bijektiv ist, und dass $\sinh^{-1}$ auch stetig ist.

8.2. Gleichmässige Konvergenz 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{x + \frac{1}{n}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $[0,1]$ gegen eine funktion f konvergiert. Schreiben Sie f explizit auf.

(b) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig auf $[0,1]$?

Lösung.

(a) Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x \in (0,1] \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n(0) = 0$. Deswegen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0 = f(0).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für jedes $x \in (0,1]$ gilt

$$\left| \frac{x}{x + \frac{1}{n}} - 1 \right| = \frac{\frac{1}{nx}}{1 + \frac{1}{nx}}. \tag{1}$$

Wir bemerken, dass für jedes $x \in (0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{nx}}{1 + \frac{1}{nx}} = 0,$$

deswegen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x).$$

(b) Die Konvergenz ist nicht gleichmässig. Tatsächlich es folgt aus (1), dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n - f| \geq \sup_{x\in(0,1]} \frac{\frac{1}{nx}}{1 + \frac{1}{nx}} \geq 1,$$

da

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{nx}}{1 + \frac{1}{nx}} = 1.$$

8.3. Gleichmässige Konvergenz von gleichmässig stetige Funktionen

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von gleichmässig stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.
Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass f stetig ist.
Zeigen Sie, dass f sogar gleichmässig stetig ist.

Lösung.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_n gleichmässig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so dass

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ falls } |x-y| < \delta.$$

Dann

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

falls $|x-y| < \delta$.

8.4. Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Betrachten Sie die folgende Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie jeweils, ob die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise und/oder gleichmässig konvergiert.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{n}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(n\pi x)$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{nx+1}$

Lösung.

(a) Wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen die Funktion $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(x)}{n} - 0 \right| \leq \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin(x)|}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ wenn } n \to \infty.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl gleichmässig und auch punktweise gegen f.

(b) Wir behaupten dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht punktweise konvergiert. tatsächlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(1) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Deswegen konvergiert die Folge $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.
Es folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht punktweise konvergiert. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nicht gleichmässig.

(c) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0,$$

die Folge konvergiert aber nicht gleichmässig, da $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in(0,1)} \left| \frac{1}{nx+1} - 0 \right| \geq \frac{1}{n\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{2}.$$

8.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen f, g sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

- **(i)** $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$
- **(ii)** $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen fg
- **(iii)** Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$
- **(iv)** Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen fg
- **(v)** Alle Aussagen sind inkorrekt

(b) Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen f, g sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

- **(i)** $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$
- **(ii)** $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen fg
- **(iii)** Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$
- **(iv)** Wenn f, g stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen fg
- **(v)** Alle Aussagen sind inkorrekt

(c) Betrachten Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie:

$$f_n(x) := \left(x - \frac{1}{n}\right)^2, \quad \forall x \in [0,1]$$

Bestimmen Sie, gegen welche Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Folge konvergiert und ob die Konvergenz gleichmässig ist.

- **(i)** $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist gleichmässig
- **(ii)** $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig
- **(iii)** $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist gleichmässig
- **(iv)** $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig
- **(v)** Es existiert ein $x \in [0,1]$, sodass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert

Lösung.

(a) (i)

(b) (i)

(c) (iii)