9.1. Potenzreihen

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradii der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

(b) Sei

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Sei $r' \in (0, r)$.
Zeigen Sie, dass f auf $[-r', r']$ gleichmässig stetig ist.

Lösung.

(a) a) Mit dem Quotientenkriterium folgt aus:

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)},$$

also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{1}{4}$$

Der Konvergenzradius ist also 4.

b) Dank des Wurzelkriteriums ist klar, dass:

$$\sqrt[n]{2^{n^2}|x|^n} = 2^n|x\ |,$$

was gegen $+\infty$ konvergiert. Also konvergiert die Reihe nur für $x = 0$ (dort sind alle Reihenglieder bis auf das erste 0!) und der Konvergenzradius also 0.

c) Es sei (a_n) die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe, dann gilt hier:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \neq m^2, \forall m \in \mathbb{N}_0 \\ 2^m, & \text{wenn } n = m^2, m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Beachte, dass dann die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gerade die gewünschte Potenzreihe ist. Dann liefert das Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{|2^n x^{n^2}|} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}|x| = |x\ |,$$

also ist der Konvergenzradius 1.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sei $r' \in (0, r)$ und sei $r'' \in (r', r)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass f_n gegen f gleichmässig auf $(-r'', r'')$ konvergiert (Beispiel 4.8.1 ii)).
Nun bemerken wir, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n als Summe von Polynome auf $(-r'', r'')$ gleichmässig stetig ist. Deswegen folgt aus Übung 8.3[1], dass f auf $[-r', r']$ gleichmässig stetig ist.
Alternativ kann man bemerken, dass f auf $[-r', r']$ stetig ist (Korollar 4.8.1) und deswegen als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmässig stetig ist.

9.2. Berechnung von Limes

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie dass

$$\lim_{x\to+\infty} x^k \operatorname{Exp}(-x) = 0$$

Hinweis: *Bemerken Sie, dass* $Exp(-x) = 1/Exp(x)$ *und*

$$Exp(x) > \frac{x^{k+1}}{k+1!} \text{ für } x > 0$$

(b) Sei $\alpha > 0$ beliebig. Wir definieren für $x > 0$

$$x^\alpha = Exp(\alpha \operatorname{Log}(x)).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha Log(x) = 0$$

Hinweis: *Benützen Sie die Substitution* $y = -\alpha Log(x)$ *und das Limes*

$$\lim_{x\to 0^+} Log(x) = -\infty$$

[1] Übung 8.3 wurde für Funktionen auf $\mathbb{R}$ formuliert, dasselbe Argument funktioniert aber für Funktionen auf offene Intervallen.

Lösung.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Aus der Definition von Exp folgt, dass

$$Exp(x) > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall x > 0.$$

Deswegen

$$Exp(-x) = \frac{1}{Exp(x)} < \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \quad \forall x > 0.$$

Es folgt, dass

$$0 < x^k Exp(-x) < \frac{(k+1)!}{x} \quad \forall x > 0.$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

folgt dass

$$\lim_{x\to\infty} x^k Exp(-x) = 0$$

(b) Sei $\alpha > 0$. Für jedes $x > 0$ sei

$$y(x) = -\alpha Log(x) \quad \forall x > 0.$$

Dann $\forall x > 0$

$$x^\alpha Log(x) = Exp(-y(x))\frac{y(x)}{-\alpha}.$$

Wir bemerken, dass

$$x \to 0^+ \iff y(x) \to \infty.$$

Deswegen

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha Log(x) = \lim_{y\to\infty} Exp(-y)\frac{y}{-\alpha} = 0$$

wegen Teil $a)$ mit $k = 1$.

9.3. Bernoulli-de L'Hôpital Berechnen Sie die folgende Limes mithilfe des Bernoulli-de L'Hôpital Satzes

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Log}(3x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-x-2}$

Lösung. Bemerken Sie zunächst, dass in alle untere Beispiele die Bedingungen des Bernoulli-de L'Hôpital Satzes erfüllt sind.

(a)

$$(e^x - 1)' = e^x, \quad (x)' = 1,$$

deswegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

(b)

$$(e^x - 1)' = e^x, \quad (x^2)' = 2x$$

deswegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x} = \infty.$$

(c)

$$(Log(3x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0, \quad (x^2)' = 2x$$

deswegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Log}(3x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

(d)

$$(x^3 - 6x^2 + 8x)' = 3x^2 - 12x + 8, \quad (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$$

deswegen

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 12x + 8}{2x - 1} = \frac{3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 8}{2\cdot 2 - 1} = \frac{-4}{3}.$$

9.4. Umkehrsatz

Die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Tangens hyperbolicus* sind definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie Ableitungen der Funktionen $\cosh x, \sinh x$ und $\tanh x$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine der obigen Funktionen. Bestimmen Sie

$$I_f = \{x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0\}$$

und bemerken Sie, dass für alle drei Funktionen I_f ein Intervall ist.

(c) Skitzieren Sie die Graphen der drei Hyperbelfunktionen.

(d) Benützen Sie den Umkehrsatz um zu zeigen, dass die drei Hyperbelfunktionen auf den entsprechenden Bereichen I bijektiv sind.
Man schreibt die Inverse der Hyperbelfunktionen als

$$\operatorname{arcsinh} = (\sinh)^{-1}, \quad \operatorname{arccosh} = (\cosh)^{-1}, \quad \operatorname{arctanh} = (\tanh)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von arcsinh, arccosh und arctanh.

(e) Bestimmen Sie die Ableitungen von arcsinh, arccosh und arctanh (als Funktionen der Hyperbelfunktionen und ihren Inversen).

(f) Skitzieren Sie die Graphen der Funktionen arcsinh, arccosh und arctanh.

Lösung.

(a)

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$
$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x),$$
$$\tanh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh^2(x)$$

(b)

$$I_{\sinh} = \mathbb{R}.$$
$$e^x > e^{-x} \iff x > 0,$$

deswegen

$$I_{\cosh} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}.$$
$$e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

deswegen

$$\tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daher

$$I_{\tanh} = \mathbb{R}.$$

(c) Eine Skitze der drei Hyperbelfunktionen finden Sie auf Seite 91 im Vorlesungsskript.

(d) Da sinh, cosh und tanh auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, folgt aus dem Umkehrsatz dass sie auf die entsprechende Intervallen I invertierbar sind.
Die Definitionsbereiche der Inversen sind

$$D_{\text{arcsinh}} = \mathbb{R}, \quad D_{\text{arccosh}} = (1, \infty), \quad D_{\text{arctanh}} = (-1, 1).$$

(e) Aus der Umkehrsatz folgt, dass

$$\text{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\text{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh}(x))},$$

$$\text{arccosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\text{arccosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\text{arccosh}(x))},$$

und

$$\text{arctanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\text{arctanh})} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\text{arctanh}(x))}.$$

(f) Eine Skitze der Inversen der drei Hyperbelfunktionen finden Sie auf der Wikipedia-Seiten
`https://de.wikipedia.org/wiki/Areasinus_hyperbolicus_und_Areakosinus_hyperbolicus`
und
`https://de.wikipedia.org/wiki/Areatangens_hyperbolicus_und_Areakotangens_hyperbolicus`.

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert gleichmässig auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Ich weiss nicht.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{x+\sin(x)}{x}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) Wegen Bernoulli-de L'Hôpital existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert wegen Bernoulli-de L'Hôpital.

(iii) Man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden und $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert, aber man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden.

(c) Sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sin(\cos(\sin(x)))$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

$f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))$

$f'(x) = \cos(x)\sin(x)\cos(x)$

$f'(x) = -\cos(\sin(-\cos(x)))$

$f'(x) = -\cos(x)\cos(\sin(x))\sin(\cos(\sin(x)))$

Lösung.

(a) (ii)

(b) (iv)

(c) (i)