10.1. Potenzreihen und Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Identität zu beweisen:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \forall x \in]-1,1[$$

(a) Berechnen Siedie Ableitung der Funktion:

$$\frac{1}{1-x} \text{ auf }]-1,1[$$

(b) Berechnen Sie nun die Ableitung derselben Funktion mittels der geometrischen Reihendarstellung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ auf }]-1,1[$$

Hinweis: *Benützen Sie Satz 5.4.2.*

(c) Folgern Sie die Identität aus der Aufgabenstellung durch Kombinieren der vorherigen Berechnungen.

Lösung.

(a) Mit der Quotientenregel folgt für alle $|x| < 1$, da dort $1 - x \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(b) Wir bemerken, dass die Potenzreihe Konvergenzradius $\rho = 1$ hat. Tatsächlich

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Daher folgt aus Satz 5.4.2, dass wir in $(-1, 1)$ die Potenzreihe summandenweise ableiten dürfen und finden somit:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

wobei die Summation nun bei $n = 1$ beginnt, da konstante Funktionen Ableitung 0 besitzen.

(c) Benutzen wir die gefundene Identität für die Ableitung von $1/(1-x)$, so sehen wir, dass wenn wir beide Seiten mit x multiplizieren:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

wobei die Identität für alle $|x| < 1$ gilt, da dort die geometrische Potenzreihe normal auf beschränkten Teilintervallen konvergiert.

10.2. Gleichmässige Konvergenz und Ableitungen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{(e^{-|x|} - 1)^2 + e^{-2n}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert. Schreiben Sie f explizit auf.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig?

Lösung.

(a) Wir bemerken zunächst, dass für $a, b \in [0, \infty)$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b,$$

daher

$$0 \leq \sqrt{a^2 + b^2} - a \leq b.$$

Deswegen gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sqrt{(e^{-|x|} - 1)^2 + e^{-2n}} - (1 - e^{-|x|}) \leq e^{-n}. \tag{1}$$

Nun setzen wir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - e^{-|x|}.$$

Dann folgt aus (1), dass

$$f_n \to f \text{ gleichmässig.}$$

(b) Wir bemerken zunächst, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C^1(\mathbb{R})$. Um das zu sehen, genügt es zu zeigen, dass

$$g(x) = (1 - e^{-|x|})^2 \in C^1(\mathbb{R}).$$

Nun es ist klar, dass $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g'(x) = 2(1 - e^{-|x|})e^{-|x|}\mathrm{sgn}(x).$$

Ausserdem ist g auch an der Stelle 0 differenzierbar: dank Bernoulli-de L'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{(1 - e^{|x|})^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1 - e^{-|x|})e^{-|x|}\mathrm{sgn}(x)}{1} = 0.$$

Da

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0 = g'(0)$$

schliessen wir, dass $g \in C^1(\mathbb{R})$.
Nun behaupten wir, dass die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig konvergiert.
Nehmen wir zum Widerspruch an, dass $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine Funktion h konvergiert. Da

$$f_n' \to f' \text{ punktweise in } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

muss gelten, dass

$$h = f' \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nach Satz 4.8.1 ist h stetig, aber

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Das ist ein Widerspruch.
Wir schliessen, dass die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmässig konvergiert.

10.3. Höhere Ableitungen und Taylor Reihen

(a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen bis und mit 4-ter Ordnung

a) $f(x) := \cos(x)e^{\sin(x)}$

b) $f(x) := \log(1 + x^2)$

c) $f(x) := e^x \cos(x) - x\sin(x)$

(b) Bestimmen Sie für jede der obigen Funktionen das Taylorpolynom zur Ordnung 4 um $x = 0$.

Lösung.

(a) a) Dank der Ketten- und Produktregel finden wir:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(x)e^{\sin(x)} + \cos(x)^2 e^{\sin(x)} \\
&= (-\sin(x) + \cos(x)^2)e^{\sin(x)} \\
f''(x) &= -\cos(x)e^{\sin(x)} - \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)} - 2\cos(x)\sin(x)e^{\sin(x)} \\
&\quad + \cos(x)^3 e^{\sin(x)} \\
&= (-\cos(x) - 3\cos(x)\sin(x) + \cos(x)^3)e^{\sin(x)} \\
f'''(x) &= (\sin(x) + 3\sin(x)^2 - 4\cos(x)^2 - 6\cos(x)^2\sin(x) + \cos(x)^4)e^{\sin(x)} \\
f^{(4)}(x) &= (1 + 15\sin(x) + 15\sin(x)^2 - 10\cos(x)^2 - 10\cos(x)^2\sin(x) \\
&\quad + \cos(x)^4)\cos(x)e^{\sin(x)}
\end{aligned}$$

b) Abermals unter Verwendung der Ketten- und Produkt/Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\
f''(x) &= -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{12(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}
\end{aligned}$$

c) Wie in den vorherigen Teilaufgaben finden wir unter Verwendung der üblichen Rechenregeln zu Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x - x)\ \cos(x) - (e^x + 1)\sin(x) \\
f''(x) &= (x - 2e^x)\sin(x) - 2\cos(x) \\
f'''(x) &= (3 - 2e^x)\sin(x) + (x - 2e^x)\cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= -x\sin(x) - 4(e^x - 1)\cos(x)
\end{aligned}$$

(b) a) Für $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ finden wir:

$$T_4 f(x;0) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{3}{3!}x^3 - \frac{8}{4!}x^4 = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4$$

b) Für $f(x) = \log(1+x^2)$ finden wir:

$$T_4 f(x;0) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{12}{4!}x^4 = x^2 - \frac{1}{2}x^4$$

c) Für $f(x) = e^x \cos(x) - x\sin(x)$ finden wir:

$$T_4 f(x;0) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 = 1 + x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

10.4. Taylor Approximation.

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x)$$

Wir wollen f durch Taylor-Polynome $T_m f(x;a)$ in $a = 0$ approximieren. Hier ist m die Ordnung des Polynoms.

Wir wissen, dass (bis auf die ersten 12 Dezimalstellen) $\cos(0.2) = 0.980066577841$ ist. Was ist die kleinste Ordnung m, damit der Näherungsfehler in $x = 0.2$ höchstens 10^{-10} ist?

Was ist in diesem Fall der Näherungsfehler in $x = 1$?

Lösung. Wir berechnen die Taylorpolynome $T_m f(x, 0)$:

$$\begin{aligned}
&T_0 f(x,0) = 1;\\
&T_1 f(x,0) = 1;\\
&T_2 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2;\\
&T_3 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2;\\
&T_4 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;\\
&T_5 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;\\
&T_6 f(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6;
\end{aligned}$$

Die Näherungsfehlern sind:

$$\begin{aligned}
|\cos(0.2) - T_0 f(0.2,0)| &= 0.019933422159;\\
|\cos(0.2) - T_1 f(0.2,0)| &= 0.019933422159;\\
|\cos(0.2) - T_2 f(0.2,0)| &= 6.6577841 \cdot 10^{-5};\\
|\cos(10^{-1}) - T_3 f(0.2,0)| &= 6.6577841 \cdot 10^{-5};\\
|\cos(10^{-1}) - T_4 f(0.2,0)| &= 8.8826 \cdot 10^{-8};\\
|\cos(10^{-1}) - T_5 f(0.2,0)| &= 8.8826 \cdot 10^{-8};\\
|\cos(10^{-1}) - T_6 f(0.2,0)| &= 6.3 \cdot 10^{-11};
\end{aligned}$$

Die kleinste Ordnung m, damit der Näherungsfehler in $x = 0.2$ höchstens 10^{-10} ist, ist $m = 6$. In diesem Fall ist $2.452809 \cdot 10^{-5}$ der Näherungsfehler in $x = 1$.

10.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$2 \geq f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist streng monoton wachsend.

(iv) f ist streng monoton fallend.

(v) Keine der obigen Antworten.

Lösung.

(a) (i)

(b) (v)

(c) (i), (ii), (iii)