11.1. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1$,

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1}$,

(c) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Hinweis: *Man erinnere sich, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall stets sein Maximum und Minimum annimmt.*

Lösung.

(a) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \iff x \in \left\{2, -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

(b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

ist, also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1-\sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1+\sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1+\sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1+\sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

(c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\ f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\ f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\ f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

11.2. Grenzwerte und Taylorpolynome

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe einer Taylorapproximation:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1+2x^2}{x\sin(x)^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

Lösung.

(a) Wir sehen dank der Restgliedformel:

$$\log(1+x) = x + xr(x),$$

wobei $r(x)$ gegen 0 konvergiert, wenn $x \to 0$. Somit gilt:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x + xr(x)}{x} = 1 + r(x),$$

und wir finden daher den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\ \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + r(x) = 1$$

(b) Da $\cos(2x)$ eine Potenzreihe ist, lässt sich das Taylorpolynom 4.Ordnung von $\cos(2x) - 1 - 2x^2$ leicht bestimmen:

$$\cos(2x) - 1 + 2x^2 = \frac{2^4}{4!}x^4 + x^4 r_1(x) = \frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x),$$

wobei $r_1(x) \to 0$, falls $x \to 0$ dank der Restgliedformel für Taylorpolynome. Zudem gilt:

$$\sin(x) = x + xr_2(x),$$

und somit:

$$x\sin(x)^3 = x^4(1 + r_2(x))^3,$$

wobei auch hier $r_2(x) \to 0$, wenn $x \to 0$. Daher können wir sehen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x\sin(x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + x^4 r_1(x)}{x^4(1 + r_2(x))^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3} + r_1(x)}{(1 + r_2(x))^3} = \frac{2}{3}$$

(c) Wir bemerken zuerst:

$$\cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\frac{1}{x}\log(\cos(x))\Big)$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, reicht es den folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x}$$

Wir bestimmen das Taylorpolynom des Zählers: Der erste Koeffizient lässt sich durch Einsetzen bestimmen:

$$\log(\cos(0)) = \log(1) = 0,$$

Durch Ableiten finden wir zudem:

$$\Big(\log(\cos(x))\Big)' = -\frac{1}{\cos(x)}\sin(x)$$

Somit ist die Ableitung in $x = 0$ gerade 0. Daher folgt mittels der Restgliedformel:

$$\log(\cos(x)) = 0 + \frac{0}{1!}x + xr(x) = xr(x),$$

wobei $r(x) \to 0$ wenn $x \to 0$ dank der Taylorformel. Daher berechnen wir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xr(x)}{x} = \lim_{x\to 0} r(x) = 0,$$

und somit dank der Stetigkeit:

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)^{\frac{1}{x}} = \exp(0) = 1$$

11.3. Partielle Integration

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels partielle Integration:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\, Log(x) dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x\cos(2-3x)dx$

(d) $\displaystyle\int_0^3 (2+5x)e^{\frac{x}{3}}dx$

Hinweis: *Für b) dürfen Sie die folgende trigonometrische Identität benützen*

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\,Log(x)dx =& \frac{1}{2}x^2 Log(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{x}dx \\ =& \frac{1}{2}4Log(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = 2Log(2) - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)dx =& x\frac{\sin^2(x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{2}dx \\ =& \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x\cos(2-3x)dx &= 4x\frac{\sin(2-3x)}{-3}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4\frac{\sin(2-3x)}{-3} \\ &= \frac{4}{9}\sin(1) + \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \sin(2-3x)dx \\ &= \frac{4}{9}\sin(1) + \frac{4}{9}\cos(2-3x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}(\sin(1) + 1 - \cos(1))\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^3 (2+5x)e^{\frac{x}{3}}dx = (2+5x)3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3 - \int_0^3 5\cdot 3e^{\frac{x}{3}} = 51e - 6 - 15\cdot 3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3 = 6e + 39.$$

11.4. Substitutionsregel

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels Substitutionsregel:

(a) $\int_{-2}^{2} (3x^2 - 9x)^4 (6x-9) dx,$

(b) $\int_0^1 (3x - 2x^3) e^{x^4 - 3x^2} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)} dx$

Lösung.

(a) Sei

$$y(x) = 3x^2 - 9x,$$

dann

$$y'(x) = 6x - 9.$$

Deswegen

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (3x^2 - 9x)^4 (6x-9) dx = \int_{-2}^{2} y^4(x) y'(x) dx = \int_{y(-2)}^{y(2)} y^4 dy = \frac{1}{5} y^5 \bigg|_{30}^{-6} \\ = \frac{1}{5}(-6^5 - 30^5) = \frac{-24307776}{5}\end{aligned}$$

(b) Sei

$$y(x) = x^4 - 3x^2,$$

dann

$$y'(x) = 4x^3 - 6x.$$

Deswegen

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x - 2x^3) e^{x^4 - 3x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{y(x)} y'(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{y(0)}^{y(1)} e^y dy = -\frac{1}{2} e^y \bigg|_0^{-2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(c) Sei

$$y(x) = 1 + x^2,$$

dann

$$y'(x) = 2x.$$

Deswegen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{y}}dy \\ &= \frac{1}{2}2\sqrt{x}\Big|_1^2 = \sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

(d) Sei

$$y(x) = \cos(x)$$

dann

$$y'(x) = -\sin(x).$$

Deswegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}dx = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{4}} \frac{1}{y^4}dy = \frac{1}{3}y^{-3}\Big|_1^{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} - 1\right) = \frac{1}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

11.5. Konvexität

Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x.$

(b) $g\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = -\log(x).$

(c) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Lösung.

(a) Die Funktion f ist konvex, da $(e^x)'' = e^x > 0$.

(b) Die Funktion g ist auch konvex, da $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ und deshalb $-\log''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

(c) Die Funktion H ist nicht konvex. Zum Beispiel,

$$H\Big(0.5(-1) + 0.5(+1)\Big) = 1 > 0.5 \cdot H(-1) + 0.5 \cdot H(1) = 0.5.$$

11.6. Integration und Taylor Theorem

Berechnen Sie das folgende Limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_n^{n+1}\sqrt{x}dx - n^{\frac{1}{2}}\right)$$

Hinweis: *Benützen Sie den Mittelwertsatz und/oder Taylor Theorem.*

Lösung.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\int_n^{n+1}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left((n+1)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right),$$

Aus Taylor Theorem folgt, dass $\xi_n \in (n, n+1)$ existiert, so dass

$$(n+1)^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}n^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}(\xi_n)^{-\frac{1}{2}}$$

Insbesonders

$$\left|\frac{2}{3}\left((n+1)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right) - n^{\frac{1}{2}}\right| \le \frac{1}{4}(\xi_n)^{-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Deswegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_n^{n+1}\sqrt{x}\,dx - n^{\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

11.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion f im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

(i) $x + x^2 + 1/2x^3$

(ii) $x + x^2 + x^3$

(iii) $1 + x + x^2 + 1/2x^3$

(iv) $1 + x + x^2 + x^3$

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)$$

(i) $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/6(x-1)^3 + 1/12(x-1)^4$

(ii) $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/3(x-1)^3 + 1/6(x-1)^4$

(iii) $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/3(x-1)^3 + 1/4(x-1)^4$

(iv) $(x-1) + 1/2(x-1)^2 - 1/6(x-1)^3 + 1/3(x-1)^4$

(c) Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(i) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = -\cos(\phi)\cos(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi.$

(ii) $\int \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = \sin(\phi)\sin(\phi) - \int \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi.$

(iii) $\int x\log(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx.$

(iv) $\int 2x^2 e^{x^2}\,dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}\,dx.$

(v) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

Lösung.

(a) (i)

(b) (i)

(c) (v)