12.1. Integrale berechnen per Definition

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Treppenfunktion:

$$f_n(x) = \frac{k^2}{n^2} \quad \forall x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Erklären Sie, warum

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

und schliessen Sie dauraus, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

(d) Schliessen Sie aus der obigen Teilaufgaben, dass

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

(e) Berechnen Sie mittels Riemannscher Summen das Integral

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Hinweis: *Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Lösung.

(a) Da x^2 stetig ist, folgt die Konvergenz aus Satz 6.2.3. Dafür sollen wir einfach zeigen, dass die Feinheit der Zerlegungen gegen 0 konvergiert. Tatsächlich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, für jedes $k \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{k-(k-1)}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{k^2}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

(c) Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Angenommen, die Aussage stimmt für $n = N$, dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} k^2 =& \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) + (N+1)^2 = \frac{1}{6}(N+1)(2N^2+7N+6)\\ =& \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(2N+3).\end{aligned}$$

Wir schliessen, dass die Aussage stimmt für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Insbesonders $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

(d) Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

schliessen wir aus (a) und (c) dass

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

(e) Wir wählen die Treppenfunktionen $f_n(x)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \ldots n\}$ gilt:

$$f_n(x) = \frac{k^3}{n^3} = \Big(\frac{k}{n}\Big)^3, \forall x \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right],$$

Dann gilt wie oben:

$$\int_0^1 x^3 dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man

$$\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Daher folgern wir:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

12.2. Partialbruchzerlegung

Ziel dieser Aufgabe ist es, rationale Funktionen in einfachere Summanden zu zerlegen. Dies wird im Zusammenhang mit Integration ein wichtiges Hilfsmittel sein.

(a) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Machen Sie beide Summanden gleichnamig. Sie können aus der gewünschten Gleichheit **zwei** lineare Gleichungen in A, B herauslesen.

(b) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + Cx + D,$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest um den Grad des Zählers auf 1 zu reduzieren.

(d) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$. Vergewissern Sie sich, alle drei Summanden notwendig in der Zerlegung sind (d.h. $A, B, C \neq 0$).

Hinweis: Sie müssen nur eine geeignete Formulierung geben, diese aber nicht beweisen.

(e) Benutzen Sie Partialbruchzerlegungen, um die Stammfunktionen der folgenden Funktionen zu bestimmen:

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$

Lösung.

(a) Bringen wir beide Summanden auf einen gemeinsamen Nenner, so sehen wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{Ax-2A}{(x-1)(x-2)} + \frac{Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Die gesuchten Konstanten A, B müssen also folgendes lineares System erfüllen:

$$A + B = 0, \quad 2A + B = -1$$

Direktes Ausrechnen zeigt:

$$A = -1, B = 1$$

Somit gilt also:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

(b) Unser Vorgehen der letzten Teilaufgabe ergibt sofort:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Somit sind die gesuchten Gleichungen:

$$A + B = 1, \quad 2A + B = -1$$

Auflösen ergibt sofort:

$$A = -2, B = 3$$

Daher ist die gesuchte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

(c) Wie im Hinweis verwenden wir zuerst Polynomdivision, um die Zerlegung zu vereinfachen. Hierzu bemerken wir:

$$x^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 2) + 7x - 6.$$

Dies lässt sich einfach aus einer Division mit Rest herauslesen. Daher gilt:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-1)(x-2) + 7x - 6}{(x-1)(x-2)} = x + 3 + \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}$$

Somit ist $C = 1, D = 3$. Für A, B gehen wir vor wie bereits zuvor und finden das System:

$$A + B = 7, \quad 2A + B = 6$$

Somit muss gelten:

$$A = -1, B = 8$$

Daher haben wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$$

(d) Wir finden durch Erweitern:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + (4A+2B-C)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Das gesuchte Gleichungssystem ist hier also:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 0 &= -4A - 3B + C \\ 1 &= 4A + 2B - C \end{aligned}$$

Auflösen zeigt sofort:

$$A = 1, B = -1, C = 1$$

Somit haben wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

Da alle drei Konstanten $\neq 0$ sind, folgt, dass alle drei Summanden nötig waren.

(e) Einer der grossen Nutzen von Partialbruchzerlegungen besteht darin, dass sie die Bestimmung von Stammfunktionen signifikant vereinfachen:

- Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

Da $\log(x)$ eine Stammfunktion zu $1/x$ ist, finden wir:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = -\log(|x-1|) + \log(|x-2|) + C,$$

für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass der Absolutbetrag verwendet wird, damit wir überall auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ eine Stammfunktion haben.

- Aus der zweiten Teilaufgabe wissen wir:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

Somit folgt, analog zu vorhin:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} dx = -2\log(|x-1|) + 3\log(|x-2|) + C,$$

für eine beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

- Dank unserer Partialbruchzerlegung wie oben gilt:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x+3-\frac{1}{x-1}+\frac{8}{x-2},$$

und daher:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}dx = \frac{1}{2}x^2+3x-\log(|x-1|)+8\log(|x-2|)+C,$$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$ Aus den obigen Berechnungen ist klar, dass:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2},$$

und daher ist sind die Stammfunktionen gegeben durch:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx = \log(|x-1|)-\log(|x-2|)-\frac{1}{x-2}+C,$$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$.

12.3. Integrale

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3-x}dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}dx,$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}dx.$

Lösung.

(a) Wir machen den Ansatz

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\omega_1}{x}+\frac{\omega_2}{x+1}+\frac{\omega_3}{x-1}$$

und erhalten

$$\omega_1(x^2-1)+\omega_2 x(x-1)+\omega_3 x(x+1)=1\,,$$

d.h.

$$\begin{cases} \omega_1+\omega_2+\omega_3=0\,, \\ -\omega_2+\omega_3=0\,, \\ -\omega_1=1\,. \end{cases}$$

Die Lösungen des Systems sind

$$\omega_1=-1\,,\ \ \omega_2=\frac{1}{2}\,,\ \ \omega_3=\frac{1}{2}\,,$$

und deshalb erhalten wir

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{1}{x(x+1)(x-1)}\overset{\text{(PBZ)}}{=}-\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{dx}{x^3-x} &= -\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x-1}\,dx \\
&= -\ln x\Big|_{x=2}^{x=3}+\frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_{x=2}^{x=3}+\frac{1}{2}\ln(x-1)\Big|_{x=2}^{x=3} \\
&= -\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \ln\frac{2}{3}+\ln\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\sqrt{2}=\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right) \\
&= \ln\sqrt{\frac{32}{27}}
\end{aligned}$$

(b) Für den Nenner gilt

$$x^2-2x-63=(x+7)(x-9)$$

und daher bestimmen wir A, B so dass

$$\frac{4x-2}{(x+7)(x-9)}=\frac{A}{x-9}+\frac{B}{x+7}.$$

Wir erhalten

$$4x-2=A(x+7)+B(x-9).$$

Einsetzen von $x = -7$, bzw. $x = 9$ liefert

$$-30 = -16B \quad \Rightarrow B = 15/8$$

und

$$34 = 16 \cdot A \quad \Rightarrow A = 17/8.$$

Also gilt

$$\frac{4x-2}{x^2-2x-63} = \frac{17/8}{x-9} + \frac{15/8}{x+7}.$$

Das Integral ist damit

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx &= \int \frac{17/8}{x-9}dx + \int \frac{15/8}{x+7}dx \\ &= \frac{17}{8}\log(|x-9|) + \frac{15}{8}\log(|x+7|) + c.\end{aligned}$$

(c) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}\,.$$

Das liefert nun

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

und somit das System

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 1\,. \end{cases}$$

d.h. $a = 2$ und $b = -3$. Wir bekommen deshalb

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx \\ &= 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} + C.\end{aligned}$$

(d) Wir faktorisieren den Nenner und bekommen

$$(x^2-9)^2 = [(x-3)(x+3)]^2 = (x-3)^2(x+3)^2\,.$$

Weil die Nullstellen 3 und -3 Multiplizität 2 besitzen, folgt, dass wir den Ansatz

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$$

machen müssen, wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind.

Somit erhalten wir

$$\frac{A(x-3)(x+3)^2 + B(x+3)^2 + C(x-3)^2(x+3) + D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

und

$$(A+C)x^3+(3A+B-3C+D)x^2+(-9A+6B-9C-6D)x+(-27A+9B+27C+9D) = x^2\,,$$

was uns das System

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B-3C+D=1 \\ -9A+6B-9C-6D=0 \\ -27A+9B+27C+9D=0 \end{cases}$$

liefert. Das System besitzt die Lösungen

$$A=\frac{1}{12},\ B=\frac{1}{4},\ C=-\frac{1}{12},\ D=\frac{1}{4}$$

und deshalb ist die gesuchte Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{12(x-3)} + \frac{1}{4(x-3)^2} - \frac{1}{12(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2}\,.$$

Mit der Partialbruchzerlegung folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}\,dx &= \int \frac{1}{12(x-3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x-3)^2}\,dx \\ &\quad - \int \frac{1}{12(x+3)}\,dx + \int \frac{1}{4(x+3)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{12}\log(|x-3|) - \frac{1}{4(x-3)} \\ &\quad - \frac{1}{12}\log(|x+3| - \frac{1}{4(x+3)} + C\end{aligned}$$

(e) Zunächst zerlegen wir die gegebene rationale Funktion durch Polynomdivion in die Summe eines Polynoms $p(x)$ und eines rationalen Anteils $r(x)$, so dass der Grad des Zählers von $r(x)$ kleiner ist als der Grad des Nenners. Wir erhalten

$$(x^{10} - x^7 + 3x) : (x^3 - 1) = x^7 + \frac{3x}{x^3 - 1}\,.$$

Wir faktorisieren den Nenner von $r(x) = \frac{3x}{x^3-1}$ und bekommen

$$r(x) = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

In diesem Fall wird der Ansatz durch

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

gegeben. Somit erhalten wir

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c}{x^3 - 1}$$

und das System

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b + c = 3 \\ a - c = 0\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen

$$a = 1,\ b = -1,\ c = 1$$

sind. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{x^{10} - x^7 + 3x}{x^3 - 1} = x^7 + \frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+x+1}\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{10} - x^7 + 3x}{x^3 - 1}\,dx &= \int x^7\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) + \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx + C_1. \end{aligned}$$

Um das letzte Integral zu berechnen, versuchen wir die Substitution $u = x^2+x+1$. Es gilt $\frac{du}{dx} = (2x+1)$. Wir teilen das Integral also wieder auf:

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Den ersten Teil können wir nun mithilfe der Substitution $u = x^2 + x + 1$ berechnen:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\log(|u|)+C_2 = -\frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|)+C_2.$$

Für den zweiten Teil, ergänzen wir quadratisch und benutzen Substitution:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx &= \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}\,dx \\ &= \sqrt{3}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv \\ &= \sqrt{3}\arctan(v) + C_3 = \sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C_3.\end{aligned}$$

Wir schliessen daraus

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{8}x^8 + \log(|x-1|) - \frac{1}{2}\log(|x^2+x-1|) \\ +\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + C\end{aligned}$$

12.4. Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

(a) $y' - 3y = e^{5x}$,

(b) $y' - 3y = e^{3x}$,

(c) $y' - y = \sin x$,

(d) $y' - \frac{y}{x} = x$.

Lösung.

(a) Die homogene Lösung ist

$$y_{\mathrm{hom}}(x) = Ce^{3x}.$$

Wir nehmen

$$y(x) = C(x)e^{3x}$$

als Ansatz und wir ableiten und einsetzen:

$$C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = e^{5x}.$$

Wir bekommen:

$$C'(x) = e^{2x}.$$

Deshalb ist

$$C(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist:

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K\right) e^{3x} = \frac{1}{2}e^{5x} + Ke^{3x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

(b) Die homogene Lösung ist wieder $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}$ und als Ansatz nehmen wir $y(x) = C(x)e^{3x}$. Nach Einsetzen und Ableiten erhalten wir

$$C'(x) = 1 \implies C = x + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist:

$$y(x) = xe^{3x} + Ke^{3x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

(c) Die homogene Lösung ist $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{x}$. Als Ansatz nehmen wir $y(x) = C(x)e^{x}$. Nach Einsetzen und Ableiten erhalten wir

$$C'(x) = \sin x e^{-x}.$$

Zweichfache partielle Integration ergibt:

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Die Lösung ist:

$$y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + Ke^{x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

(d) Die homogene Lösung erhalten wir durch Separation der Variablen:

$$y' = \frac{y}{x}$$

wird

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Also ist $\log|y| = \log|x| + C$ die Lösung. Insbesondere ist

$$y = Bx, \qquad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

die Lösung. Beachten Sie, dass $y = 0$ auch eine Lösung ist. Also ist

$$y_{\text{hom}}(x) = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

die homogene Lösung.

Als Ansatz nehmen wir $y(x) = C(x)e^x$. Nach Einsetzen und Ableiten erhalten wir

$$C'(x) = 1 \implies C(x) = x + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist:

$$y(x) = x^2 + Kx, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

12.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)^2} dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

(i) 0

(ii) $(x-1)^4$

(iii) $(x-1)^3$

(iv) $(x-1)^2$

(c) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x\log(x)}dx$$

(i) $\log\left(\frac{\log(3)}{\log(2)}\right)$

(ii) $\frac{1}{2}(\log^2(3)-\log^2(2))$

(iii) $-\frac{5}{36}$

(iv) $\arctan(\log(3))-\arctan(\log(2))$

(d) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}$$

(i) $\arctan(\sin(x))+c$

(ii) $\arccos(\sin(x))+c$

(iii) $\log(\sin(x))+c$

(iv) $\log(\tan(x))+c$

(e) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

(i) $\log(1+\sin(x))+c$

(ii) $\log(\sin(x))+c$

(iii) $\arctan(1 + \sin(x)) + c$

(iv) $\arctan(\sin(x)) + c$

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii)

(c) (i)

(d) (i)

(e) (i)