13.1. Uneigentliche Integrale

Sei f Riemann-integrabel. Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls das Limes

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

existiert, schreibt man

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

und das obige Limes wird uneigentliches Integral benannt.
Berechnen Sie die folgende uneigentliche Integrale, falls das entsprechende Limes existiert. Sonst erklären Sie, warum das Limes nicht existiert.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx.$

Lösung.

(a) Für jedes $r \in (1,\infty)$

$$\int_1^r \frac{1}{x^4}dx = \frac{-1}{3}\frac{1}{x^3}\bigg|_1^r = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r^3}-1\right).$$

Deswegen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r^3}-1\right) = \frac{1}{3}.$$

(b) Für jedes $r \in (0,\infty)$ erhalten wir mit der Substitution $y = x^2$

$$\int_0^r xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{r^2} e^{-y}dy = -\frac{1}{2}e^{-y}\bigg|_0^{r^2} = -\frac{1}{2}(e^{-r^2}-1).$$

Deswegen

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-r^2}-1) = \frac{1}{2}.$$

(c) Für jedes $r \in (0,\infty)$ erhalten wir mit der Substitution $y = x^2$

$$\int_0^r \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{r^2}\frac{1}{y+1}dy = \frac{1}{2}\log(y+1)\bigg|_0^{r^2} = \frac{1}{2}\log(r^2+1).$$

Da

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2}\log(r^2+1)=\infty$$

konvergiert das Integral nicht.

13.2. Stammfunktionen per Rekursion berechnen

Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für jedes $n \in \mathbb{N}$, um die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen bestimmen zu können:

$$\cos(x)^n, x^n e^x, \log(x)^n$$

Berechnen Sie dann alle Stammfunktionen für $1 \leq n \leq 6$.

Lösung.

Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen:

$$\cos(x)^n, x^n e^x, \log(x)^n$$

Zuerst bemerken wir, dass für $n = 1$ gilt:

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \int xe^x dx = xe^x - e^x + C, \int \log(x)dx = x\log(x) - x + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Dies folgt gemäss den bekannten Ableitungen und Formeln aus der Vorlesung. Für $n = 2$ haben wir dank partieller Integration analog zu 12.1.(a):

$$\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} + C$$

Ferner findet man auch, mittels analogen Überlegungen wie im Fall $n = 1$:

$$\int \log(x)^2 dx = x\log(x)^2 - 2x\log(x) + 2x + C, \int x^2 e^x dx = x^2 e^2 - 2xe^x + 2e^x + C$$

Wir verwende nun Prop. 6.1.4.(2), um induktiv die Stammfunktionen für $n \geq 2$ zu bestimmen. Es gilt für $n \geq 2$ dank partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)^n dx &= \int (\sin(x))' \cos(x)^{n-1} dx \\
&= \sin(x)\cos(x)^{n-1} + (n-1)\int \sin(x)^2 \cos(x)^{n-2} dx \\
&= \sin(x)\cos(x)^{n-1} + (n-1)\int \cos(x)^{n-2} dx - (n-1)\int \cos(x)^n dx,
\end{aligned}$$

und die elementare Umformungen zeigen:

$$\int \cos(x)^n dx = \frac{1}{n}\sin(x)\cos(x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int \cos(x)^{n-2}dx$$

Dies erlaubt uns nun, die folgenden Formeln leicht herzuleiten:

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)^3 dx &= \frac{1}{3}\sin(x)\cos(x)^2 + \frac{2}{3}\sin(x) + C\\
\int \cos(x)^4 dx &= \frac{1}{4}\sin(x)\cos(x)^3 + \frac{3}{8}\sin(x)\cos(x) + \frac{3}{8}x + C\\
\int \cos(x)^5 dx &= \frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4 + \frac{4}{15}\sin(x)\cos(x)^2 + \frac{8}{15}\sin(x) + C\\
\int \cos(x)^6 dx &= \frac{1}{6}\sin(x)\cos(x)^5 + \frac{5}{24}\sin(x)\cos(x)^3 + \frac{15}{48}\sin(x)\cos(x) + \frac{15}{48}x + C
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir eine Rekursionsformel für $\log(x)^n$ bestimmen, wobei wir denselben Trick wie für $n = 1, 2$ mittels partieller Integration verwenden:

$$\begin{aligned}
\int \log(x)^n dx &= \int (x)' \log(x)^n dx\\
&= x\log(x)^n - \int x \cdot n \log(x)^{n-1}\frac{1}{x}dx\\
&= x\log(x)^n - n\int \log(x)^{n-1}dx
\end{aligned}$$

Diese Rekursionsformel muss nicht mehr umgeformt werden. Hieraus können wir bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int \log(x)^3 dx &= x(\log(x)^3 - 3\log(x)^2 + 6\log(x) - 6) + C\\
\int \log(x)^4 dx &= x(\ \log(x)^4 - 4\log(x)^3 + 12\log(x)^2 - 24\log(x) + 24) + C\\
\int \log(x)^5 dx &= x\Big(\sum_{k=0}^{5}(-1)^{5-k}\frac{5!}{k!}\log(x)^k\Big) + C\\
\int \log(x)^6 dx &= x\Big(\sum_{k=0}^{6}(-1)^{6-k}\frac{6!}{k!}\log(x)^k\Big) + C
\end{aligned}$$

wobei wir hier einfachheitshalber $\log(x)^0 = 1$ definieren (obwohl $0^0 = \log(1)^0$ nicht wohldefiniert ist). Im Allgemeinen kann man sogar induktiv zeigen:

$$\int \log(x)^n dx = x\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\log(x)^k\Big) + C,$$

für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Zuletzt sehen wir, dass abermals dank Prop. 6.1.4.(2) gilt:

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$$

Daher, wenn wir definieren:

$$I_n := \int x^n e^x dx,$$

so finden wir die Rekursionsformel:

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass (unter Verwendung der Rekursionsformel und unserer obigen Berechnungen):

$I_0 = e^x + C, I_1 = (x-1)e^x + C, I_2 = (x^2 - 2x + 2)e^x + C, I_3 = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C,$

für ein beliebiges $C \in \mathbb{R}$. Dies führt uns zu der folgenden Vermutung:

$$I_n = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k \Big) e^x + C$$

Diese Formel ist korrekt für $n = 0, 1, 2, 3$ wie oben gesehen. Um die Identität per Induktion zu beweisen, genügt es also, zu zeigen, dass die Formel für I_n gilt, sofern sie für I_{n-1} korrekt ist. Dies führt und zu:

$$\begin{aligned}
I_n &= x^n e^x - n I_{n-1} \\
&= x^n e^x - n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k} (n-1)!}{k!} x^k \Big) e^x + C \\
&= \frac{(-1)^{n-n} n!}{n!} x^n e^n + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k \Big) e^x + C \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} x^k \Big) e^x + C
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. Zumal wir eigentlich nur an I_n für $n \leq 6$ finden sollen, würde es auch reichen, die Rekursionsformel zu verwenden, um folgende Ausdrücke zu finden:

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^x dx &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \\
\int x^4 e^x dx &= (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)e^x + C \\
\int x^5 e^x dx &= (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C \\
\int x^6 e^x dx &= (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720)e^x + C
\end{aligned}$$

13.3. Ableiten von Parameterintegralen

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2} dx$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sowie die Kettenregel.

Lösung.

Wir schreiben:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(t) := \int_0^t e^{-x^2} dx$$

Gemäss dem Hauptsatz ist G differenzierbar mit Ableitung:

$$G'(t) = e^{-t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Somit sehen wir nun also:

$$F(t) = G(\sin(t))$$

Dies ist klar, denn:

$$F(t) = \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2} dx = G(\sin(t)),$$

da G als Stammfunktion gewählt wurde. Somit gilt also nach Kettenregel:

$$F'(t) = G'(\sin(t)) \cos(t) = e^{-\sin(t)^2} \cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

13.4. Potenzreihe und Ableitung

Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Hinweis: *Für* $x \in (-1, 1)$ *sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Drücken Sie die obige Reihe als Wert von f' *aus.*

Lösung. Da das Konvergenzradius der Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

gleich 1 ist, gilt gemäss Beispiel 5.4.2 für jedes $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Insbesonders

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nun für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

deswegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} f'(\frac{1}{2}) = 2.$$

13.5. Potenzreihe und Integration

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in (-1, 1)$

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}.$$

(b) Folgern Sie aus Teilaufgabe (a) dass für $x \in (-1, 1)$

$$\log(1+x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}.$$

Lösung.

(a) Zunächst bemerken wir, dass $\forall x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}(1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2(n+1)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \left((-1)^n + (-1)^{n-1}\right) = 1,\end{aligned}$$

deswegen

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}. \tag{1}$$

(b) Die Substitution $y = x^2$ liefert

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+y}dy = \log(1+x^2) + C.$$

Anderseits folgt aus Korollar 6.3.3, dass

$$\int 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + C$$

Daher

$$\log(1+x^2) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + C,$$

wobei C eine Konstante ist. Evaluiert man die obige Gleichung an der Stelle 0, sieht man, dass $C = 0$. Wir schliessen, dass

$$\log(1+x^2) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n}.$$

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(x) = f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussage ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$$

(iv) Keine der obigen.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(x) = -f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussage ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(iv) Keine der obigen.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral
$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

(i) 4

(ii) 4π

(iii) 2

(iv) π

(d) Finden Sie die Stammfunktion der folgende Funktion auf $(0, \infty)$
$$f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$$

(i) $\frac{1}{x^3}$

(ii) $\frac{x\log(x) - x}{2x}$

(iii) $-\frac{\log(x)+1}{x}$

(iv) $\frac{\log(x)}{x}$

Lösung.

(a) (i)

(b) (ii)

(c) (iv)

(d) (iii)