14.1. Kreise und Gerade in der komplexen Ebene

Wir erinnern uns, dass ein *Kreis* in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch eine Gleichung der Form:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2,$$

wobei alle (x, y), welche diese Identität erfüllen, auf dem Kreis mit Mittelpunkt (m_x, m_y) mit Radius r liegen. Eine *Gerade* ist hingegen gegeben durch:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

wobei alle (x, y), welche die Identität erfüllen, auf einer Gerade liegen mit Steigungsvektor $(-b, a)$ und c die Entfernung zum Ursprung parametrisiert. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine einheitliche Beschreibung von Geraden und Kreisen in der komplexen Ebene zu erhalten.

(a) Nutzen Sie die Zerlegung von komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil, um zu beweisen, dass die folgenden Gleichungen Kreise bzw. Geraden in der Ebene darstellen:

(i.) $|z|^2 - 1 = 0$

(ii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} = 0$

(iii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} - 2 = 0$

(iv.) $-iz + i\overline{z} + 1 = 0$

Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Beweisen Sie durch Umformen der Identität und unter der Verwendung des Real- und Imaginärteils von z, dass die folgende Identität:

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0,$$

einen Kreis bzw. eine Gerade parametrisiert für eine beliebige komplexe Zahl b sowie reelle Zahlen a, c mit $|b|^2 - ac > 0$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. lassen sich alle Kreise und Geraden in der Ebene durch eine solche Identität beschreiben?

(c) Verwenden Sie die Darstellung aus der vorherigen Teilaufgabe, um zu zeigen, dass die Inversionsabbildung, welche z seine Inverse z^{-1} zuordnet, Kreise und Geraden mit dem Koeffizienten $c \neq 0$ auf Kreise und Geraden abbildet. Denken Sie darüber nach, was im Falle eines Kreises bzw. einer Geraden mit $c = 0$ passiert.

Lösung.

(a) (i.) Es gilt:

$$|z|^2 = x^2 + y^2,$$

wenn $z = x + iy$. Also ist die Menge $|z|^2 - 1 = 0$ gerade:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Die gesuchte Menge ist also der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung.

(ii.) Wählen wir $z = x + iy$, so wird die Gleichung zu:

$$x^2 + y^2 + 2y - 2 = x^2 + (y+1)^2 - 1$$

Durch Umordnen sehen wir:

$$x^2 + (y+1)^2 = 3$$

Also ist die Menge gerade der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, -1)$.

(iii.) Wir zuvor reduziert sich die Gleichung zu:

$$x^2 + (y+1)^2 - 3 = 0,$$

also:

$$x^2 + (y+1)^2 = 3$$

Dies parametrisiert gerade den Kreis mit Mittelpunkt $(0, -1)$ und Radius $\sqrt{3}$.

(iv.) Direktes Einsetzen von $z = x + iy$ liefert:

$$-iz + i\overline{z} + 1 = 2y + 1 = 0$$

Dies Parametrisiert genau die Gerade $y = -1/2$ parallel zur x-Achse.

(b) Setzen wir $z = x + iy$ ein, so können wir die Identität umformen zu:

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = a(x^2 + y^2) + 2(b_1 x + b_2 y) + c = 0$$

wobei wir $b = b_1 + b_2 i$ verwendet haben mit b_1, b_2 reell. Dies lässt sich auch schreiben als:

$$a\Big(x + \frac{b_1}{a}\Big)^2 - \frac{b_1^2}{a} + a\Big(y + \frac{b_2}{a}\Big)^2 - \frac{b_2^2}{a} + c = 0,$$

oder auch:

$$\Big(x + \frac{b_1}{a}\Big)^2 + \Big(y + \frac{b_2}{a}\Big)^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

Man bemerke, dass wir hier implizit $a \neq 0$ angenommen haben. Die Bedeutung von $|b|^2 > ac$ wird hierbei klar, denn:

$$\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} > 0,$$

ist genau der Radius des Kreises um $(-b_1/a, -b_2/a)$ der die vorgegebene Gleichung beschreibt. Somit haben wir gesehen, dass für $a \neq 0$ die Gleichung ein Kreis beschreibt. Umgekehrt ist klar aufgrund der expliziten Formeln für Mittelpunkt und Radius, dass jeder Kreis sich in dieser Form schreiben lässt.

Wir behandeln nun den Fall $a = 0$. Dann $|b| \neq 0$, also $b \neq 0$. Man sieht sofort, dass:

$$\overline{b}z + b\overline{z} + c = 2(b_1 x + b_2 y) + c = 2b_1 \cdot x + 2b_2 \cdot y + c = 0,$$

unter Verwendung derselben Methoden wie oben. Dank der Einführung in die Aufgabe wissen wir, dass eine solche Menge eine Gerade ist und jede Gerade diese Form besitzt. Somit haben wir die Aufgabe gelöst.

(c) Wir wissen, dass:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Teilen wir also die Gleichung für eine Gerade oder einen Kreis mit $c \neq 0$ (dann $z = 0$ keine Lösung der Gleichung) durch $|z|^2$, so sehen wir:

$$a + \overline{b}\frac{z}{|z|^2} + b\frac{\overline{z}}{|z|^2} + c\frac{1}{|z|^2} = a + \overline{bz^{-1}} + bz^{-1} + c|z^{-1}|^2 = 0,$$

zumindest für $z \neq 0$. Es zeigt sich, dass z^{-1} eine ähnliche Identität erfüllt, daher also auf einem Kreis liegt (unabhängig davon, ob vorher $a \neq 0$ oder nicht). Falls $c = 0$, so liegt $z = 0$ in der Menge der Lösungen. Wenn wir $z \neq 0$ betrachten, so sehen wir analog zu oben:

$$a + \overline{bz^{-1}} + bz^{-1} = 0$$

Daher liegen alle $z \neq 0$ weiterhin auf einer Geraden. Für diejenigen, die die Riemann-Sphäre kennen, kann das Verhalten in ∞ ergänzt werden um zu sehen, dass sich die Aussage in 0 und ∞ fortsetzen lassen.

14.2. Konvergenzverhalten auf dem komplexen Rand

(a) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und beweisen Sie, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$ divergiert.

(b) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(c) Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

Hinweis: Es ist hilfreich zu bemerken, dass jede komplexe Zahl x mit $|x| = 1$ die Form $x = e^{i\varphi}$ besitzt, für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie geometrische Summationsformeln für Ausdrücke der Form $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ mit $q \in \mathbb{C}$.

Lösung.

(a) Zunächst bemerken wir, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{1} = 1,$$

deswegen ist das Konvergenzradius der Reihe gleich 1. Ein x mit $|x\ | = 1$ hat daher die folgende Form:

$$x = e^{i\varphi},$$

für ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies nun in die Partialsummen der Potenzreihe ein, so erkennen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{m} e^{in\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{im\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

Man erkennt problemlos, dass:

$$|\ x^n| = \left| e^{in\varphi} \right| = 1,$$

also ist die Folge keine Nullfolge und die Reihe kann somit nirgends konvergieren auf dem Rand.

(b) Wir bemerken, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n}\right)}$$

, deswegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

und daher ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 1.
Verwenden wir abermals die Darstellung von x als Exponential, so sehen wir, dass die Folge $a_n = 1/n$ monoton fallend ist und die Folge $b_n = e^{in\varphi}$ beschränkte Partialsummen hat, falls $\varphi \neq 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$:

$$\left|\sum_{n=1}^{m} b_n\right| = \left|e^{i\varphi}\frac{1-e^{im\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right| \leq \left|\frac{2}{1-e^{i\varphi}}\right|,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass:

$$\left|1 - e^{im\varphi}\right| \leq 2$$

Daher können wir schliessen, dass die Reihe also für $\varphi \neq 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ konvergiert. Daher konvergiert die Potenzreihe am Rand des Konvergenzkreises für $x \neq 1$ bedingt. Für $x = 1$ sehen wir, dass die Potenzreihe wie folgt aussieht:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

was offensichtlich divergiert.

(c) Wie oben berechnen wir $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{2}{n}\log\left(\frac{1}{n}\right)},$$

deswegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

und somit ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 1. Man beachte, dass für alle $|x| = 1$ gilt:

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ absolut konvergiert, folgt, dass die Potenzreihe überall auf dem Rand absolut konvergiert.

14.3. Zwischenwertsatz für Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Version des Zwischenwertsatzes für Ableitungen zu beweisen.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist, aber f' unstetig in 0 ist.

(b) Es sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und stetig und wir nehmen an, dass die Grenzwerte:

$$f'(a_+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(b_-) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

existieren. Zeigen Sie, dass wenn $f'(a_+) > 0 > f'(b_-)$, dann erreicht f ein globales Maximum auf $[a, b]$ im Inneren des Intervalls, d.h. an einer Stelle $c \in]a, b[$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $f'(a_+) > 0$ impliziert, dass für $x > a$ nahe genug auch gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Daher gilt für x nahe a auch $f(x) > f(a)$. Begründen Sie dies genau und folgern Sie eine ähnliche Ungleichung für $f'(b_-)$.

(c) Es sei nun $f'(a_+) > \gamma > f'(b_-)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Begründen Sie mittels der Funktion $g(x) = f(x) - \gamma x$ und den Überlegungen aus der vorherigen Teilaufgabe, dass ein $c \in]a, b[$ existiert, sodass:

$$g'(c) = f'(c) - \gamma = 0$$

(d) Folgern Sie mittels der vorherigen Teilaufgabe, dass wenn $f'(a_+) > f'(b_-)$, dann nimmt f' jeden Wert in $]f'(b_-), f'(a_+)[$ an.

(e) Nehmen Sie nun an, dass $f'(a_+) < f'(b_-)$. Wie können Sie in diesem Fall aus den vorherigen Teilaufgaben folgern, dass f' jeden Wert in $]f'(a_+), f'(b_-)[$ annimmt?

Hinweis: Wie müssen Sie f verändern, damit die vorhergehende Diskussion sich anwenden lässt?

Lösung.

(a) Wir sehen sofort, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sicherlich stetig und differenzierbar ist als Komposition solcher Funktionen. Die Ableitung für $x \neq 0$ lässt sich mit Ketten-, Produkt und Quotientenregel wie folgt berechnen:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dank der Oszillationen des Kosinus, genauer durch Einsetzen der Folgen:

$$a_n := \frac{1}{2n\pi}, b_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

sehen wir sofort:

$$f'(a_n) = 2a_n \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1,$$

und andererseits:

$$f'(b_n) = 2b_n \sin((2n+1)\pi) - \cos((2n+1)\pi) = 1.$$

Dies zeigt, da sowohl (a_n) als auch (b_n) gegen 0 konvergieren, dass die Ableitung keine stetige Fortsetzung in 0 besitzt. Also gilt, auch wenn f in 0 differenzierbar ist, automatisch dass f' in 0 unstetig ist.

Wir müssen noch prüfen, ob f in 0 differenzierbar ist. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f dann auch in 0 stetig ist, das bedeutet, wir können automatisch schliessen, dass f stetig und differenzierbar ist und haben die Aufgabe gelöst. Zur Differenzierbarkeit betrachten wir den Differenzenquotienten und beobachten für beliebige $x \neq 0$:

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

wobei wir die Beschränktheit des Sinus verwendet haben. Lässt man nun $x \to 0$, so sehen wir, dass:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

also ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

(b) Es gilt, dass wenn $f'(a_+) > 0$ ist, dann gilt per Definition des Grenzwertes:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in [a,b], |x-a| < \delta : \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0,$$

und somit auch:

$$f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a),$$

für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-a| < \delta$. Dies folgt, da $x - a > 0$. Das impliziert, dass $f(a)$ sicherlich nicht das Maximum der Funktion f sein kann. Ganz analog argumentiert man für $f(b)$, wobei hier aus $f'(b_-) < 0$ folgt, dass:

$$\exists \delta' > 0, \forall x \in [a,b], |x-a| < \delta' : \quad \frac{f(x)-f(b)}{x-b} < 0,$$

und unter Verwendung von $b > x$ also auch:

$$f(x) - f(b) > 0 \Rightarrow f(x) > f(b).$$

Da f also sein Maximum, welches gemäss Extremumssatz an einer Stelle in $[a,b]$ angenommen werden muss, da f stetig ist, nicht in a oder b erreicht, nimmt f sein Maximum an einer Stelle $c \in]a,b[$ an.

(c) Betrachten wir g wie aus der Aufgabe, so sehen wir sofort:

$$g'(a_+) > 0 > g'(b_-),$$

denn der entsprechende Grenzwert für g lässt sich sofort dank der Differenzierbarkeit von Polynomen auf ganz $\mathbb{R}$ bestimmen. Daher gilt gemäss der vorherigen Teilaufgabe, dass g sein Maximum an einer Stelle $c \in]a,b[$ annimmt. Das bedeutet aber auch, dass gilt:

$$g'(c) = f'(c) - \gamma = 0,$$

dank eines Resultats aus der Vorlesung. Somit ist die gewünschte Aussage gezeigt.

(d) Die vorherige Aufgabe zeigt uns, dass für beliebiges $\gamma \in]f'(b_-), f'(a_+)[$ eine Stelle $c_\gamma \in]a,b[$ existiert mit $f'(c_\gamma) = \gamma$. Das gewünschte Resultat ist also eine direkte Konsequenz.

(e) Wir definieren $\tilde{f}(x) := -f(x)$. Dann sehen wir sofort:

$$\tilde{f}'(a_+) > 0 > \tilde{f}'(b_-),$$

also lässt sich das vorherige Resultat auf $\tilde{f}$ anwenden. (Bemerke, dass $\tilde{f}$ dieselben Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften wie f besitzt) Da aber $\tilde{f}'(x) =$

$-f'(x)$, kann man somit auch den Zwischenwertsatz für Ableitungen für f beweisen, denn wenn $\gamma \in]f'(a_+), f'(b_-)[$, so gilt $-\gamma \in]-f'(b_-), -f'(a_+)[=]\tilde{f}'(b_-), \tilde{f}'(a_+)[$. Damit existiert ein $c_\gamma \in]a, b[$ mit $\tilde{f}'(c_\gamma) = -f'(c_\gamma) = -\gamma$. Kürzt man das Vorzeichen weg, ist also klar, dass

$$f'(c_\gamma) = \gamma.$$

14.4. Grenzwerte

Berechnen Sie die folgende Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)-\log(n)}{\log(n+1)-\log(n)}$.

Lösung. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt es

$$\frac{\log(n+2)-\log(n)}{\log(n+1)-\log(n)} = \frac{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

deswegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)-\log(n)}{\log(n+1)-\log(n)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\log(1+x)}$$

falls das Limes auf der rechten Seite existiert. Aus der Satz von Bernoulli-de L'Hôpital folgt, dass das Limes tatsächlich existiert und

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+2x}2}{\frac{1}{1+x}} = 2.$$

14.5. Parameterabhängige Integrale

Sei $f[0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig so dass

$$\int_0^{x^2+x^3} f(t)dt = x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Bestimmen Sie $f(2)$.

Hinweis: Es sei F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Schreiben Sie das Integral um mittels F und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Wenn Sie auf beiden Seiten nach x ableiten und $F' = f$ verwenden, sollten Sie der Lösung nahe kommen.

Lösung. Es sei F die Stammfunktion zu f mit $F(0) = 0$. Gemäss Hauptsatz gilt:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

Somit sehen wir:

$$F(x^2+x^3) = F(x^2+x^3) - F(0) = \int_0^{x^2+x^3} f(t)dt = x, \forall x \geq 0$$

Leiten wir nun für $x > 0$ auf beiden Seiten nach x ab, so sehen wir dank der Kettenregel und $F' = f$:

$$f(x^2+x^3)(2x+3x^2) = 1$$

Daher wissen wir durch Einsetzen von $x = 1$:

$$f(2) \cdot 5 = 1 \;\Rightarrow\; f(2) = \frac{1}{5}$$

14.6. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 1 Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion, sodass Zahlen $k, K \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$kf(x) \leq f'(x) \leq Kf(x), \quad \forall x \in]0,1[$$

(a) Es sei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Berechnen Sie die Ableitung von $g_C(x) := f(x)e^{-Cx}$.

(b) Betrachten Sie nun f wie in der Aufgabenstellung. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$f(0)e^{kx} \leq f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0,1]$$

(c) Falls $k = K$, d.h.:

$$f'(x) = Kf(x), \quad \forall x \in]0,1[,$$

folgern Sie, dass $f(x) = f(0)e^{Kx}$.

Lösung.

(a) Direktes Ausrechnen mittels Produktregel zeigt:

$$g'(x) = f'(x)e^{-Cx} - Cf(x)e^{-Cx}$$

Man beachte, dass diese Formel für alle $C \in \mathbb{R}$ gilt, sogar für $C = 0$.

(b) Gemäss der Annahme wissen wir, dass für $g_K(x) := f(x)e^{-Kx}$ und $g_k(x) := f(x)e^{-kx}$ folgende Ungleichungen auf $]0,1[$ gelten:

$$g_K'(x) \leq 0 \leq g_k'(x)$$

Damit ist g_K monoton fallend auf $[0,1]$, während g_k monoton wachsend ist. Daher gilt:

$$f(0) = g_K(0) \geq g_K(x) = f(x)e^{-Kx} \Rightarrow f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Ganz analog lässt sich die untere Schranke aus g_k herleiten.

(c) Wenn $k = K$, so finden wir gemäss der Ungleichung in der vorherigen Teilaufgabe:

$$f(0)e^{Kx} \leq f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0,1]$$

Dies impliziert nun $f(x) = f(0)e^{Kx}$ dank der Gleichheit zwischen oberer und unterer Schranke.

14.7. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 2 Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin(x), \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

(a) Beweisen Sie, dass es genügt, die folgende Ungleichung:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

zu zeigen, wobei $g(x) := \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ für alle $x \in [0, \pi/2]$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum von g mittels des Ableitungskriteriums und den Randwerten.

Hinweis: g erreicht sicher ein Minimum auf $[0, \pi/2]$. Weshalb? Wir weisen darauf hin, dass das Minimum auch in 0 oder $\pi/2$ angenommen werden kann und dort das Ableitungskriterium für Extremalstellen fehlschlägt, vergleiche mit dem Beispiel $h(x) := x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Man bemerke, dass mittels des Monotonie-Kriteriums bestimmt werden kann, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(c) Nutzen Sie die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgabe, um die gesuchte Ungleichung zu beweisen.

Lösung.

(a) Dies ist eine einfache Konsequenz der Umordnung der Ungleichung.

(b) g ist stetig auf $[0, \pi/2]$ und erreicht somit dort sein Minimum. Dies kann entweder in 0, $\pi/2$ oder einem inneren Punkt des Intervalls angenommen werden. Für $x = 0, \pi/2$ finden wir:

$$g(x) = 0,$$

also wenn $g(x) \leq 0$ an einer Stelle x im Inneren des Intervalls ist, so erreicht es auch sein Minimum im Inneren. Wir wissen, dass wenn g sein Extremum in einem Punkt $x \in]0, \pi/2[$ annimmt, dann gilt dort:

$$g'(x) = 0$$

Nun können wir aber berechnen, dass wenn g in x_0 ein Extremum hat, so gilt:

$$g'(x_0) = \cos(x_0) - \frac{2}{\pi} = 0 \Rightarrow \cos(x_0) = \frac{2}{\pi} > 0$$

Wir beachten, dass für alle $x < x_0$ gilt:

$$g'(x) > g'(x_0) = 0,$$

da $\cos(x)$ auf $[0, \pi]$ monoton fallend ist. Ferner finden wir durch analoge Argumentation für alle $x > x_0$:

$$g'(x) < g'(x_0) = 0$$

Dank des Monotonie-Kriteriums können wir also folgern, dass g auf $[0, x_0]$ monoton wachsend und auf $[x_0, \pi/2]$ monoton fallend ist. Somit muss x_0 zwangsläufig ein lokales Maximum sein und kann nicht das globale Minimum werden. Daher ist das Minimum von g in $x = 0$ und $x = \pi/2$ und somit 0. Das Minimum kann gemäss unserer Argumentes nicht in $]0, \pi/2[$ angenommen werden, also finden wir:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

(c) Die finale Ungleichung der letzten Teilaufgabe beinhaltet die notwendige Aussage.

14.8. Uneigentliche Integrale Berechnen Sie die folgende uneigentliche Integrale

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{2+x^2}\,dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 \sin(e^x)e^x\,dx$

(c) $\int_0^\infty 2^{-x}\,dx$

Lösung.

(a) Für jedes $r > 0$ liefert die Substitution $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^r \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^r \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(y)\Big|_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

Deswegen

$$\int_0^\infty \frac{1}{2+x^2}dx = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(b) Für jedes $r > 0$ liefert die Substitution $y = e^x$

$$\int_{-r}^{0} \sin(e^x)e^x dx = \int_{e^{-r}}^{1} \sin(y)dy = -\cos(y)\Big|_{e^{-r}}^{1} = -\cos(1) + \cos(e^{-r}).$$

Deswegen

$$\int_{-\infty}^{0} = \lim_{r\to\infty} \Big(-\cos(1) + \cos(e^{-r})\Big) = -\cos(1) + \cos(0) = 1 - \cos(1).$$

(c) Für jedes $r > 0$ gilt

$$\int_0^r 2^{-x}dx = \int_0^r e^{-x\log(2)}dx = \frac{-1}{\log(2)}e^{-x\log(2)}\Big|_0^r = \frac{-1}{\log(2)}(2^{-r} - 1).$$

Deswegen

$$\int_0^\infty 2^{-x}dx = \lim_{r\to\infty} \frac{-1}{\log(2)}(2^{-r} - 1) = \frac{1}{\log(2)}.$$

14.9. Konvergente Teilfolgen

Welche der folgenden Folge besitzt eine konvergente Teilfolge?

(a) $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $(n\sin(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(n + \sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{1}{n}\sin(n) + n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösung.

(a) Die Folge ist beschränkt, deswegen besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge wegen dem Satz von Bolzano-Weierstrass.

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

deswegen konvergiert die ganze Folge.

(c)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |n + \sin(n)| \geq n - 1.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} n - 1 = \infty$$

existiert es keine konvergente Teilfolge.

(d) Falls n gerade ist, dann $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0$. Nun es gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{n gerade}}} \frac{1}{n}\sin(n) + n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{n gerade}}} \frac{1}{n}\sin(n) = 0,$$

deswegen existiert es eine konvergente Teilfolge.

14.10. Partielle Summation

Beweisen Sie die partielle Summationsregel

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

Lösung. Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k - \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \\
&= a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_{k+1} \\
&= a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)
\end{aligned}$$

14.11. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Lösung.

(a) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{2,\ -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11, \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519, \\ f(-2) &= 5. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

(b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

ist, also für

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Der Wert $-1-\sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1+\sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0, \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2. \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -1+\sqrt{2}$, der kleinste der bei $x = -1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -1+\sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x = -1$.

(c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1) \cdot (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 + x - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x = -1$ und $x = 2$ sowie die kritischen Punkte $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots, \\
f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots, \\
f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots, \\
f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots.
\end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

14.12. Längenberechnung Sei $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ eine differenzierbare Abbildung (eine Kurve). Wir nennen $\dot{v}(t) = (\dot{v}_1(t), \ldots, \dot{v}_n(t))$ den Tangentialvektor an v bei t und $d\mathbf{s} = |\dot{v}(t)|dt$ das Linienelement. Wir definieren die Länge von v als

$$L(v) := \int_a^b d\mathbf{s} = \int_a^b |\dot{v}(t)| dt.$$

(a) Sei $v(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$, $t \in [0,1]$. Berechnen Sie die Länge der Kurve und skizzieren Sie sie.

(b) Sei $v(t) = (t, f(t))$, $t \in [a,b]$ für f differenzierbar. Wie sieht die Formel für die Länge dieses Graphen aus?

Lösung.

(a) Es gilt $\dot{v}(t) = (-2\pi \sin t, 2\pi \cos t, 1)$ und damit $|\dot{v}(t)| = \sqrt{(2\pi)^2 \sin^2 t + (2\pi)^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{(2\pi)^2 + 1}$. Da dies keine t-Abhängigkeit mehr hat, ist die Länge von v einfach

$$L(v) = \int_0^1 \sqrt{(2\pi)^2 + 1}\, dt = \sqrt{(2\pi)^2 + 1}.$$

(b) Es gilt $\dot{v}(t) = (1, \dot{f}(t))$ und damit $|\dot{v}(t)| = \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2}$, also

$$L(v) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2}\, dt.$$

14.13. Ableitungen, Integrale und Grenzwerte

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Ableitungen: Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit.

a) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \cos(x^{-x})$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$

c) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f(x) := \frac{\arctan(x)}{1-x^2}$

(b) Integrale: Lösen Sie die folgenden Integrale explizit.

a) $\int_1^2 \log(x)dx$

b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan(x))dx$

d) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

e) $\int_0^1 \log(1 + x^2)dx$

f) $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\log(\sin(x))dx$

(c) Grenzwerte: Bestimmen Sie die Grenzwerte unter Verwendung aller Techniken aus der Vorlesung.

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x}$$

b)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \sin(3x)}{\cos(2x)}$$

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$$

d)
$$\lim_{x\to 0} (1 + 2\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

e)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{x}$$

f)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

g)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Hinweis: Zumal diese Aufgaben mittlerweile Routine sind, werden hierzu nur teilweise explizite Lösungen veröffentlicht. Sie können Ihre Lösungen auch auf WolframAlpha prüfen und bei Fragen den Organisator kontaktieren.

Lösung. Prüfen Sie Ihre Lösungen mittels Wolframalpha. Sollten einzelne Aufgaben Schwierigkeiten bereiten oder der Lösungsweg unklar sein, so kontaktieren Sie den Kursorganisator.

Als Hilfsmittel präsentieren wir einzelne Lösungen:

(a) Wir lösen a) und d):

In d) sehen wir mittels der Produktregel (oder der Quotientenregel):

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\arctan(x)}{1-x^2}\Big)' &= \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x\arctan(x)}{(1-x^2)^2}\\ &= \frac{1-x^2+2x(1+x^2)\arctan(x)}{(1-x^2)^2(1+x^2)}\end{aligned}$$

(b) In c) verwenden die Beobachtung:

$$1+\tan(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)}$$

Daher gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(x)+\sin(x))dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(x))dx$$

Verwenden wir die Formeln für $\cos(x), \sin(x)$, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\ &= \frac{1}{2}\Big((1-i)e^{ix}+(1+i)e^{-ix}\Big)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{ix}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-ix}\Big)\\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\Big(e^{-i\pi/4}e^{ix}+e^{i\pi/4}e^{-ix}\Big)\\ &= \sqrt{2}\cos\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\end{aligned}$$

Also wissen wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(x)+\sin(x))dx = \frac{\pi}{8}\log(2) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\Big)dx$$

Verwendet man die Substitution $y = \pi/4 - x$, so sehen wir nun sofort:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan(x))dx = \frac{\pi}{8} \log(2)$$

In h) verwenden wir, dass:

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{1 + e^x - e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \sqrt{1+e^x} - \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

Damit reduziert sich das Integral auf die Berechnung der Integrale:

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$$

Bei Letzterem genügt die Substitution $y = e^x$ und das Integral wird expllzit lösbar. Bei Ersterem führt hingegen die Substitution $y = \sqrt{1+e^x}$ direkt zu:

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2y^2}{y^2-1}dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2}{y^2-1} + 2dy$$

Alternativ lässt sich das ganze Integral mit dieser Substitution betrachten.

In i) nutzt man $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$ für alle $0 \leq x \leq \pi/2$. Dann findet man mittels der Substitution $y = \cos(x)$ sowie den Logarithmusgesetzen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\log(\sin(x))dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\log(\sqrt{1-\cos(x)^2})dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \frac{1}{2}\Big(\log(1-\cos(x)) + \cos(1+\cos(x))\Big)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\Big(\log(1-y) + \log(1+y)\Big)dy \\
&= \log(2) - 1
\end{aligned}$$

(c) In e), beobachten wir:

$$\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x} = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{x^2}},$$

also genügt es, den Grenzwert von:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

zu berechnen und davon die Wurzel zu ziehen, zumal die Wurzel eine stetige Funktion definiert. Dies ist nun einfach zu lösen mittels Taylorapproximation.

In f) beobachten wir:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

Wir erkennen, dass auf der rechten Seite eine Riemann-Summe der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[0,1]$ darstellt. Da $1/n$ gegen 0 konvergiert, finden wir also dank den Resultaten aus der Vorlesung:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

In g) gehen wir vor wie in f) und sehen:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}$$

Somit sind die Summen Riemann-Summen der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ auf $[0,1]$ und der Grenzwert lässt sich abermals mittels Integrieren der Funktion bestimmen.