0.1. Kompaktheit

Seien $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Zeigen Sie: jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ besitzt eine konvergente Teilfolge, die zu einem Punkt in $[a,b]$ konvergiert.

(b) Bemerken Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1[$ gibt, die zu $c\in\mathbb{R}$ konvergiert mit $c\notin[0,1[$.

(c) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Sei

$$f([a,b]) = \{f(x)|x\in[a,b]\}.$$

Zeigen Sie: jede Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f([a,b])$ besitzt eine konvergente Teilfolge, die zu einem Punkt in $f([a,b])$ konvergiert.

(d) Folgern Sie, dass f sein Maximum und Minimum in $[a,b]$ annimmt.

Lösung.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b]$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstrass, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt besitzt. Insbesonders besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da alle Elementen der Teilfolgen die Bedingungen

$$a_n \geq a \text{ und } a_n \leq b$$

erfüllen, liegt auch das Limes der Teilfolge in $[a,b]$.

(b) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $a_n = 1-\frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1[$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Insbesonders konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1, welches nicht in $[0,1[$ liegt.

(c) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f([a,b])$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $a_n\in[a,b]$ so dass $f(a_n)=b_n$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b]$. Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ existiert, welche zu einem Punkt $c\in[a,b]$ konvergiert. Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{n_k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{n_k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(c),$$

deswegen ist $(b_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $f([a,b])$, welche zum Punkt $f(c)\in f([a,b])$ konvergiert.

(d) Zunächst zeigen wir, dass $f([a,b])$ beschränkt ist. Wäre $f([a,b])$ nicht beschränkt, dann könnten wir eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f([a,b])$ finden, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|b_n| > n.$$

Insbesonders hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine beschränkte Teilfolge. Aus Teilaufgabe (c) folgt aber, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Konvergente Folgen sind beschränkt, deswegen existiert eine solche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.
Sei $S := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Da $f([a,b])$ beschränkt ist gilt $S < \infty$. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen S konvergiert. Nach Teilaufgabe (c) besitzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(b_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Punkt $d \in f([a,b])$ konvergiert. Sei $e \in [a,b]$ so dass $f(e) = d$. Anderseits konvergiert $(b_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ nach S als Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deswegen $f(e) = S = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, d.h. f nimmt in e sein Maximum an. Analog zeigt man, dass f in $[a,b]$ sein Minimum annimmt.

0.2. Grenzwerte Berechnen Sie die folgende Grenzwerte

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)-x}{\cos(x)-1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$

Lösung.

(a) Seien

$$f(x) = \log(x+1) - x \text{ und } g(x) = \cos(x) - 1$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1, \quad f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

und

$$g'(x) = -\sin(x), \quad g''(x) = -\cos(x).$$

Es gilt $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $g''(0) = -1$ Aus der Satz von Bernoulli-de L'Hôpital (angewendet auf f', g') folgt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Wendet man nun den Satz von Bernoulli-de L'Hôpital auf f, g, so erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

(b) Die Taylor-Entwicklung von arctan um 0 lautet

$$\begin{aligned}
&\arctan(t)\Big|_{t=0} + \frac{1}{1+t^2}\Big|_{t=0} x + \frac{1}{2}\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\Big|_{t=0} x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{-2}{(1+t^2)^2} + \frac{8t^2}{(1+t^2)^3}\right)\Big|_{t=0} x^3 \\
&+ \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dt}\right)^4 \arctan(t)\Big|_{\xi_x} x^4 \\
=&x - \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dt}\right)^4 \arctan(t)\Big|_{\xi_x}\right) x^4
\end{aligned}$$

für ein $\xi_x \in (0, x)$.
Da

$$c(x) := \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dt}\right)^4 \arctan(t)\Big|_{\xi_x}$$

beschränkt ist (für $x \in [0, 1]$) erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$n^3\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = n^3\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + c\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{3}.$$

0.3. Konvexität

Sei I ein offenes Interval. Sei $f : I \to \mathbb{R}$. f heisst *konvex* auf I, falls $\forall x_0, x_1 \in I$, $\forall t \in [0, 1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_0).$$

(a) Sei $f \in C^2(I)$. Zeigen Sie: f ist konvex auf I genau dann wenn

$$f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in I.$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind konvex? Wenn sie nicht konvex sind, auf welchem Teilintervall des Definitionsbereiches sind sie konvex?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \log(1 + x^2)$
- $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \log(x)^2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \max\{x^2, -x^2\}$

(c) Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen in $C^2(I)$ und I ein offenes Intervall. Man nehme an, dass f und g beide konvex sind. Zeigen Sie, dass fg nicht konvex sein muss.

(d) Es seien f, g wie in der letzten Teilaufgabe. Nehmen Sie an, dass $f, g \geq 0$ beide monoton wachsend sind. Ist dann fg konvex?

Lösung.

(a) Nehmen wir zunächst an, dass f konvex ist. Sei $x \in I$. Dann für jedes $h > 0$ so dass $x + h, x - h \in I$ gilt

$$f(x) \leq \frac{1}{2}\left(f(x+h) + f(x-h)\right). \tag{1}$$

Nun behaupten wir, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x). \tag{2}$$

Gleichung (2) erhält man, wenn man den Satz von Bernoulli- de L' Hôpital zweimal anwendet.
Wegen (1) ist die linke Seite von (2) nicht negativ für jedes $h > 0$ so dass $x + h, x - h \in I$. Daher schliessen wir, dass $f''(x) \geq 0$.
Für die entgegengesetzte Implikation sehen Sie den Beweis vom Satz 5.5.2 im Skript.

(b)
- Zumal die Funktion beliebig oft differenzierbar ist als Komposition solcher Funktionen, reicht es gemäss des Konvexitätskriteriums aus der Vorlesung das Vorzeichen der zweiten Ableitung zu bestimmen. Aus der vorherigen Aufgabe wissen wir:

  $$(\log(1 + x^2))'' = -\frac{2(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^2}$$

  Somit finden wir an der Stelle $x = 2$:

  $$-\frac{6}{25} < 0,$$

  und somit ist die Funktion nicht überall konvex. Tatsächlich lässt sich so sehen, dass die Funktion genau auf $[-1, 1]$ konvex ist.

- Dank des Konvexitätskriteriums aus der Vorlesung und der Differenzierbarkeit des Logarithmus reicht es, die zweite Ableitung zu bestimmen:

  $$(\log(x)^2)'' = \frac{2}{x^2} - \frac{2\log(x)}{x^2} = \frac{2 - 2\log(x)}{x^2}$$

  Die zweite Ableitung ist daher genau dann nicht-negativ, wenn:

  $$1 - \log(x) \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; e \geq x,$$

  somit ist die Funktion auf $]0, e]$ konvex, aber nicht auf $]0, \infty[$.

- Man bemerke, dass gilt:

  $$-x^2 \leq x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  Daher ist:

  $$\max\{x^2, -x^2\} = x^2$$

  Diese Funktion ist aber trivialerweise konvex, da die zweite Ableitung konstant $2 > 0$ ist.

(c) Man betrachte als Beispiel die Funktionen $f(x) = x, g(x) = -x$. Die zweiten Ableitungen dieser Funktionen verschwinden, sind sie konvex. Allerdings ist $fg(x) = f(x)g(x) = -x^2$ und diese Funktion ist nicht konvex. Damit haben wir das gewünschte Gegenbeispiel gefunden.

(d) Man bemerke, dass gilt:

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

Da beide Funktionen konvex sind, gilt:

$$f''(x), g''(x) \geq 0$$

Zudem aufgrund der Monotonie:

$$f'(x), g'(x) \geq 0$$

Daher gilt:

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \geq 0,$$

somit ist fg gemäss des Konvexitätskriteriums konvex.

0.4. Mittelwertsatz für Integrale

Seien $-\infty < a \leq b < \infty$. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Beweisen Sie, dass ein $c \in [a, b]$ existiert, sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Lösung. Da $[a, b]$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall ist, nimmt f auf $[a, b]$ sein Maximum M an einer Stelle $x_M \in [a, b]$ und Minimum m an einer Stelle $x_m \in [a, b]$. Das heisst:

$$\forall x \in [a, b] : f(x_m) = m \leq f(x) \leq M = f(x_M)$$

Da $g(x) \geq 0$ gilt nun auch:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Hieraus folgert sich sofort aufgrund der Monotonie des Integrals:

$$m \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Somit existiert ein $C \in [m, M]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = C \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Da $m \leq C \leq M$ existiert gemäss Zwischenwertsatz ein c zwischen x_m und x_M, sodass:

$$f(c) = C$$

Das heisst aber gerade:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

0.5. Nullstellen, Fixpunkte,...

(a) Hat die Gleichung

$$x^4 = (x+1)(x^2+5)$$

(mindestens) eine Lösung auf $\mathbb{R}$?

(b) Zeigen Sie: das Polynom

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8$$

hat genau eine Nullstelle.

(c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar. Nehmen Sie an, dass

$$|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in (0,1).$$

Zeigen Sie, dass es höchstens ein Punkt $c \in [0,1]$ existiert, so dass $f(c) = c$.

(d) Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass $f(0) \geq 0$ und $f(2) \leq 4$. Zeigen Sie: es existiert $c \in [0,2]$, so dass $f(c) = c^2$

(e) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Lösung.

(a) Sei
$$f(x) = x^4 - (x+1)(x^2+5) = x^4 - x^3 - x^2 - 5x - 5.$$
Es gilt $f(0) = -5$ und
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
da
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 1.$$
Deswegen gibt es $r > 0$ so dass $f(r) \geq 1$. Aus der Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $c \in (0, r)$ existiert, so dass $f(c) = 0$. Dann ist c eine Lösung der Gleichung auf $\mathbb{R}$.

(b) Wir bemerken, dass

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to\infty} = \infty.$$

Deswegen hat f gemäss dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$. Nehmen wir zum Widerspruch an, dass $a, b \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Nullstellen von f sind. Dann gibt es gemäss dem Mittelwertsatz $c \in (a, b)$ so dass $f'(c) = 0$. Nun es gilt
$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 25.$$
Die Diskriminante von f' ist

$$(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 25 = -104 < 0,$$

daher hat f' keine reelle Nullstelle. Das ist ein Widerspruch zu $f'(c) = 0$.

(c) Beweis durch Widerspruch: seien $c, d \in [0, 1]$, $c \neq d$ so dass $f(c) = c$ und $f(d) = d$. Dann sind c und d zwei Nullstellen der Funktion $g(x) = f(x) - x$ in $[0, 1]$. Deswegen existiert es gemäss dem Mittelwertsatz ein $e \in (c, d)$ so dass $g'(e) = 0$. Nun gilt aber $g'(x) = f'(x) - 1$ auf $(0, 1)$, so nach Annahme

$$|g'(x)| = |f'(x) - 1| \geq 1 - |f'(x)| > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu $g'(e) = 0$.

(d) Sei
$$g(x) = f(x) - x^2 \quad \forall x \in [0,2].$$
Dann gilt für $c \in [0,2]$
$$f(c) = c^2 \iff g(c) = 0.$$
Es gilt
$$g(0) = f(0) \geq 0 \quad \text{und } g(2) = f(2) - 4 \leq 0,$$
d.h. $g(0) \geq 0 \geq g(2)$. Deswegen folgt aus dem Zwischenwertsatz dass es $c \in [0,2]$ existiert, so dass $g(c) = 0$.

(e) Sei
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x > 0.$$
Dann
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Aus der Mittelwertsatz folgt, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert es $\xi_n \in (n, n+1)$ so dass
$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n).$$
Da $xi_n \in (n, n+1)$ gilt
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{\xi_n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
Wir schliessen, dass
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

0.6. Taylorreihen

(a) Sei
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.
Für jedes $x \in (-R, R)$ sei
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}$
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\Big|_{x=0} = k! a_k.$$

(b) Finden Sie die Taylorreihen von $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{2+x}$ und $\frac{1}{x-3}$ in der Nähe von 0. Sie dürfen bekannte Taylorreihen verwenden.

(c) Finden Sie die Taylorreihe von $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in $x = 0$.

(d) Berechnen Sie den Anfang der Taylor-Reihe der Funktion

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + x}\,,$$

mit Entwicklungspunkt 0 bis einschliesslich des Gliedes 3. Ordnung.

Lösung.

(a) Innerhalb des Konvergenzradius kann man gliedweise differenzieren und der Konvergenzradius der abgeleitete Konvergenreihe ist wieder gleich R (sehen Sie Seite 93 im Skript), daher gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\Big|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n\Big|_{x=0}.$$

Rekursiv kann man zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq n \leq k$ gilt

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Insbesonders

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n = n!.$$

Daher gilt

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^n|_{x=0} = \begin{cases} n! & \text{falls } k = n \\ 0 & \text{falls } k \neq n. \end{cases}$$

Wir schliessen, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\Big|_{x=0} = n!$$

(b) Aus der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für $|x| < 1$ folgt:

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k \text{ für } |x| < 2$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \text{ für } |x| < 3$$

(c) Es gilt für alle $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{15(x+2)} + \frac{1}{10(x-3)} \\
&= \frac{1}{6}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{30}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{30}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{30}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6} + \frac{(-1)^k}{15\cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{10}\frac{1}{3^{k+1}}\right) x^k.
\end{aligned}$$

(d) Man kann die gesuchten Anfangsglieder der Taylorreihe durch wiederholtes Differenzieren der Funktion f berechnen. Wir wählen hier eine andere Möglichkeit. Die gegebene Funktion ist das Produkt zweier Funktionen mit bekannter Taylor-Entwicklung, $f(x) = g(x)h(x)$, wobei

$$g(x) := \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

und

$$h(x) := \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Die Taylor-Entwicklung von f ergibt sich als Cauchy-Produkt dieser beiden Potenzreihen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, \quad \text{mit } \; c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell\,,$$

wobei
$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$$
und
$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{falls } \ell \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \cdot \frac{1}{\ell!} & \text{falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$
Damit erhalten wir $c_0 = 0$ und
$$c_1 = a_0 b_1 = \frac{1}{2},$$
$$c_2 = a_1 b_1 = -\frac{1}{4},$$
$$c_3 = a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24},$$
Der Anfang der Taylor-Reihe der Funktion f lautet also
$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + R_4(f,0)(x).$$

0.7. Ableitungen, Integrale

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit:
$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^{-x}.$$

(b) Lösen Sie die folgenden Integrale explizit:
$$\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x))dx.$$

Lösung.

(a) Wir bemerken
$$x^{-x} = e^{-x\log(x)}, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$
Somit, dank der Kettenregel:
$$(x^{-x})' = e^{-x\log(x)}\Big(-\log(x) - x \cdot \frac{1}{x}\Big) = -x^{-x}(1 + \log(x))$$

(b) Wir verwenden die Substitution $y = \log(x)$ um folgende Gleichung zu finden:
$$\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x))dx = \int_0^\pi \sin(y)e^y dy,$$
und durch wiederholte Anwendung von partieller Integration finden wir somit:
$$\int_0^\pi \sin(y)e^y dy = \frac{e^\pi + 1}{2}$$