1.1. Wahrheitstafeln

(a) Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden logischen Ausdrücke:

1) $A \wedge (B \vee C)$,
2) $(\neg(A \vee B)) \wedge C$,
3) $(A \wedge (\neg B)) \vee C$,
4) $(A \wedge \neg B) \vee \neg A$.

(b) Mithilfe einer Wahrheitstafel zeigen Sie

1) $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,
2) $(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

(c) Mithilfe einer Wahrheitstafel bestimmen Sie, ob die Aussage

$$(\neg A \vee B) \wedge (B \to (\neg C \wedge \neg A)) \wedge (A \vee C)$$

wahr sein kann.

1.2. Logik

(a) Was bedeuten die folgenden Aussagen? Sind sie wahr oder falsch?

1) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y > x$
2) $\forall x \in \mathbb{N} : (x > 10) \vee (x < 10)$
3) $\exists x \in \mathbb{R}, \nexists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (q \neq 0 \Rightarrow x = p/q)$
4) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (c|ab) \Rightarrow (c|a) \vee (c|b)$

Bemerkung: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a|b$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $b = ac$.

(b) Schreiben Sie die folgenden Aussagen als prädikatenlogischen Ausdruck:

1) 24 ist keine Quadratzahl.
2) Keine natürliche Zahl ist grösser als alle anderen natürlichen Zahlen.

1.3. Negation

Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen in Wort und, falls möglich, mittels Quantoren, ohne schlicht $\neg$ anzufügen.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : n < n+1$

(b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : (n = m) \vee (n + m = 0)$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z} : (n \neq m) \Rightarrow \big((k \neq 0) \wedge (n + k = m)\big)$

1.4. Induktion

Beweisen Sie die folgenden Formeln per Induktion:

(a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle natürlichen Zahlen n.

(b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ für alle natürlichen Zahlen n.

(c) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \neq 1$.

(d) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.5. Induktionsbeweis

Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

1.6. Folgerungen von Axiomen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen direkt aus den Axiomen.

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 0 = 0.$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \cdot y = 0 \implies x = 0 \;\text{ oder }\; y = 0.$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad (-1) \cdot x = -x.$

(d) $(-1) \cdot (-1) = 1.$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 \geq 0.$

(f) $\forall x > 0: \quad x^{-1} \geq 0.$

1.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online über Moodle, siehe Vorlesungswebseite.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wählen Sie die richtige Aussagen.

(i) Seien X und Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sei $B \subset Y$ eine Teilmenge. Dann $f(f^{-1}(B)) = B$.

(ii) Seien X und Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann $f^{-1}(f(A)) = A$.

(iii) Seien A und B matematische Aussagen. Dann ist $(\neg A \to B) \wedge (B \to A)$ immer wahr.

(iv) Seien A und B matematische Aussagen. Dann ist $(A \vee (\neg A \wedge B)) \iff (A \vee B)$ immer wahr.

(b) Welche ist die Negation dieser Aussage: "Es regnet und ich habe keinen Regenschirm"?

(i) Es regnet nicht oder ich habe einen Regenschirm.

(ii) Es regnet nicht und ich habe keinen Regenschirm.

(iii) Ich habe einen Regenschirm.

(iv) Es regnet nicht, daher habe ich keinen Regenschirm.

(c) Welche ist die Kontraposition dieser Aussage: "Wenn es regnet und ich keinen Regenschirm habe, werde ich nass"?

(i) Wenn es nicht regnet, werde ich nicht nass und ich habe keinen Regenschirm.

(ii) Wenn ich nass werde, regnet es und ich habe keinen Regenschirm.

(iii) Wenn ich nicht nass werde, regnet es nicht oder ich habe einen Regenschirm.

(iv) Wenn ich einen Regenschirm habe, regnet es nicht und ich werde nicht nass.

(d) Welche ist die Negation dieser Aussage: "10 ist gerade und ist kleiner oder gleich 11." ?

(i) 10 ist nicht gerade.

(ii) 10 ist grösser als 11.

(iii) 10 ist nicht gerade oder ist grösser als 11.

(iv) 10 ist nicht gerade, deshalb ist es grösser als 11.