

## 2.1. Abbildungen

(a) Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(i) von  $\{0, 11, 111\}$  nach  $\{0, 1\}$ ?

(ii) von  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\}$  nach  $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n^3 \leq 100\}$ ?

(iii) von  $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$  in das Intervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ?

(b) Sei  $f(x) := x^2 + 2 \forall x \in \mathbb{R}$ . Schreiben Sie die folgenden Mengen auf:

1.)  $f^{-1}(\{2\})$

2.)  $f^{-1}([3, 6))$

3.)  $f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

(c) Sei  $g(x) := 3x + 5 \forall x \in \mathbb{R}$ .

1.) Zeigen Sie, dass  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv ist. Schreiben Sie  $g^{-1}$  explizit auf.

2.) Berechnen Sie:

a)  $g^{-1}(0)$

b)  $g^{-1}(-10)$

c)  $g^{-1}(\frac{3}{2})$

## 2.2. Bild und Urbild

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen und betrachten Sie eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ . Für eine gegebene Teilmenge  $B$  von  $Y$  ist das *Urbild von  $B$  unter  $f$*  die Teilmenge  $f^{-1}(B)$  von  $X$ , die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge  $A$  von  $X$  kann man analog den Begriff des *Bilds von  $A$  unter  $f$*  definieren: sie ist die Teilmenge  $f(A)$  von  $Y$ , die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .

- (b)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
- (d) Geben Sie ein Beispiel von  $f$ ,  $A$  und  $B$  so dass  $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ .

### 2.3. Supremum und Infimum, I

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der folgenden Mengen. Bestimmen Sie, ob das Supremum (bzw. Infimum) ein Maximum (bzw. Minimum) ist.

- 1.)  $\{\sqrt{x}; x \in [0, \infty[ \}$ .
- 2.)  $\{\frac{1}{x}; x \in ]-\infty, 0[ \}$ .
- 3.)  $\{\frac{x}{x+1}; x \in [2, \infty[ \}$ .
- 4.)  $\{-(x-1)^2 - 4; x \in ]-3, 3[ \}$ .

### 2.4. Supremum und Infimum, II

Seien  $A$  und  $B$  zwei Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , dann definieren wir

$$A + B := \{a + b; a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Menge  $A + B$  für den folgenden Fällen. Bestimmen Sie, ob das Supremum (bzw. Infimum) ein Maximum (bzw. Minimum) ist.

- 1.)  $A = [1, 2], B = [0, 1] \cup [2, 3]$ .
- 2.)  $A = ]0, 1[, B = [-1, 0[$ .
- 3.)  $A = ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}, B = \mathbb{N}_0$ .
- 4.)  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$ .
- 5.)  $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, B = [0, 1]$ .

### 2.5. Cauchy-Schwarz

- (a) Mithilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung zeigen Sie:  $\forall a, b, c > 0$

$$(a + b + c)^2 \leq \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) (a(b+c) + b(a+c) + c(a+b))$$

(b) Zeigen Sie, dass  $\forall a, b, c > 0$

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$$

(Hint: zeigen Sie zunächst, dass  $2ab \leq a^2 + b^2$ )

(c) benützen Sie a) und b) um zu zeigen, dass  $\forall a, b, c > 0$

$$\frac{3}{2} \leq \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right)$$

## 2.6. Online-Aufgaben

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

(a) Die Ungleichung  $||x - 2| - 1| < 3$  für reelle Zahlen  $x$  ist äquivalent zu...

(i)  $x < 3$

(ii)  $|x| < 3$

(iii)  $0 < x < 2$

(iv)  $-2 < x < 6$

(v)  $-3 < x < 6$

(b) Seien  $X, Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \text{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(i)  $f$  ist injektiv,

(ii)  $f$  ist surjektiv,

(iii)  $g$  ist injektiv,

(iv)  $g$  ist surjektiv,

(v)  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

- (c) Eine reelle Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *gerade*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gerade Funktion und sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (i)  $fg$  ist gerade.
  - (ii)  $fg$  ist ungerade.
  - (iii)  $fg^2$  ist gerade.
  - (iv)  $f + g$  ist gerade.
- (d) Die Umkehrfunktion (Inverse) von  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) := x^4$  ist...
- (i)  $x^{\frac{1}{4}}$ .
  - (ii) existiert nicht.
  - (iii)  $\frac{1}{4}x$ .
  - (iv)  $x^{-4}$ .
  - (v)  $-x^4$ .
- (e) Seien  $A$  und  $B$  zwei Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Was ist die Negation der folgenden Aussage?

$$\forall a \in A \exists b \in B \text{ so dass } a \leq b$$

- (i)  $\forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq b$ .
- (ii)  $\forall a \in A \exists b \in B \text{ so dass } a > b$ .
- (iii)  $\exists b \in B \text{ so dass } \forall a \in A \ a \leq b$ .
- (iv)  $\exists a \in A \text{ so dass } \forall b \in B \ a > b$ .
- (v)  $\exists a \in A, \exists b \in B \text{ so dass } a > b$ .