4.1. Quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$

Es seien $z = a + bi, w = c + di$ komplexe Zahlen mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass:
$$z^2 = w,$$
äquivalent ist zu folgenden Gleichungen:
$$a^2 - b^2 = c, \quad 2ab = d.$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn $z^2 = w$, dann gilt $|w| = a^2 + b^2$.

(c) Wenn $z^2 = w$, beweisen Sie, dass a und b die folgenden Gleichungen erfüllen:
$$a^2 = \frac{1}{2}(|w| + c), \quad b^2 = \frac{1}{2}(|w| - c). \tag{1}$$

(d) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen a, b existieren, sodass (1) erfüllt ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass jede nicht-negative Zahl eine Wurzel hat.

(e) Wenn a, b die Gleichungen (1) erfüllen, zeigen Sie, dass auch $a^2 - b^2 = c$ sowie $(2ab)^2 = d^2$ gelten.

(f) Folgern Sie, durch geschickte Wahl der Vorzeichen von a, b, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl z existiert, sodass $z^2 = w$

4.2. Faktorisierung von Polynomen in $\mathbb{C}$

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jedes Polynom
$$P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_a z + a_0$$
als Produkt von Monomen geschriben werden kann:
$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j),$$
wobei z_j für $j \in \{0, \ldots, n\}$ die Nullstellen des P sind (erinnern Sie sich, dass diese Nullstellen nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren).

(a) Sei $w = z - z_1$ und sei

$$Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad Q(w) = P(w + z_1).$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Binomialformel, dass Q ein Polynom ist, die folgende Form hat:

$$Q(w) = w^n + b_{n-1}w^{n-1} + \ldots b_1 w$$

(das heisst, die Koeffizient von w^0 ist Null).

(b) Schliessen Sie aus Teil (a), dass wir P als $P(z) = R(z)(z - z_1)$ schreiben können, wobei R ein Polynom ist.

(c) Beweisen Sie mit Induktion, dass $P(z) = \prod_{j=1}^{m}(z - z_j)$.

4.3. Produkt von Folgen Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (d.h. $\exists \quad C > 0$ so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ $|b_n| \leq C$).
Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

4.4. Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n+3}{n^2+2}$,

(b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2+3}{2^n n^2+5}$,

(c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$,

(d) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sin(n)}{2^n} + \frac{\cos(n)}{n^4}\right)$.

Hint: *Für d) benützen Sie Aufgabe (Produkt von Folgen)*

4.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{16n^3 + 100n + 1000000}{27n^3 + 10920n + 2020}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{16}{27}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{4}{9}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1000000

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^2}{2^n n^2 + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{4}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 1

(c) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten sowie den Grenzwert der folgenden Folge:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n^3 + 22n^2 - 10}{29n^2 - 27n + 8}$$

(i) Divergiert, d.h. keine Konvergenz

(ii) Konvergiert, mit Grenzwert 0

(iii) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{1}{29}$

(iv) Konvergiert, mit Grenzwert $\frac{22}{29}$

(v) Konvergiert, mit Grenzwert 29