5.1. Häufungspunkte Explizit Bestimmen

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Folgen reeller Zahlen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := (-1)^n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{(1+(-1)^n)n^3}{n^2-n+1}$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

Hinweis: Ein *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zahl, welche der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

5.2. Unendlich viele Häufungspunkte

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die folgende Formel:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N} : 2^k \leq n < 2^{k+1} \;\Rightarrow\; a_n := \frac{n-2^k}{2^k}$$

Als Beispiel, hier sind die ersten Folgeglieder:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{4}, a_6 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{3}{4}, \ldots$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

(a) Sei $r \in [0,1]$. Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}_0\ \exists n \in \{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ so dass

$$\left| \frac{n-2^k}{2^k} - r \right| \leq \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

(b) Sei r wie in (a), $\forall k \in \mathbb{N}_0$ sei $b_k^r = \frac{n_k - 2^k}{2^k}$, wo n_k das kleinste Element in $\{2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1\}$ ist, welches Bedingung (1) erfüllt.
Zeigen Sie: $\lim_{k\to\infty} b_k^r = r$.

(c) Sei $s \in [0,1]^c$ (zur Erinnerung: $[0,1]^c = \{r \in \mathbb{R}; r \notin [0,1]\}$). Zeigen Sie, dass s kein Haüfungpunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(d) Schliessen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge gerade das Intervall $[0,1]$ ist.

5.3. Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

5.4. Supremum und Konvergenz

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in A$ sowie $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

5.5. Konvergenzkriterium

Zeigen Sie, dass eine beschränkte Folge konvergiert genau dann wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

und dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

5.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch
- **(iii)** Kann man nicht sagen.

(b) Wenn die Folge (a_n) divergiert, dann hat (a_n) mindestens einen Häufungspunkt.

- **(i)** Wahr
- **(ii)** Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(c) Eine Folge (a_n) mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Eine beschränkte Folge (a_n), welche nicht konvergiert, hat mindestens zwei Häufungspunkte.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen.

(e) Eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt ist konvergent.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Kann man nicht sagen