

6.1. Alternierende Reihen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Nullfolge, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei

$$S_N := \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n.$$

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Zeigen Sie, dann die Folge $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
- (c) Zeigen Sie, dann die Folge $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.
- (d) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$S_{2n+1} \leq S_k \leq S_{2n} \quad \forall k \geq 2n + 1.$$

- (e) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}$ existieren.
- (f) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}$$

- (g) Schliessen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

6.2. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Hinweis: Für (c) benützen Sie Aufgabe 6.1.

6.3. Eulersche Zahl I

(a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und dass $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 2$.

Hinweis: Sie dürfen die Bernoulli'sche Ungleichung benutzen: $(1+x)^n \geq 1+nx$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, und dass $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq 4$.

Hinweis: Sie dürfen wieder die Bernoulli'sche Ungleichung benutzen, wie auch die Ungleichung $\frac{n}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Bemerken Sie, dass $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und schliessen Sie aus den obigen Teilaufgaben, dass $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, und dass $a \leq b$.

(d) Zeigen Sie, dass $a = b$.

Hinweis: Benützen Sie die Abschätzung $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Das Limes $e := a = b$ heisst Eulersche Zahl.

6.4. Exponentialfunktion I

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\text{Exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Aus Beispiel 3.7.2 i) folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

Seien $x, y \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right).$$

Hinweis: Sie dürfen Satz 3.8.2 benutzen.

(b) Benützen Sie Punkt *a*) und den binomischen Lehrsatz um zu schliessen, dass

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \text{Exp}(x + y).$$

6.5. Quotientenkriterium

Bestimmen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums ob die folgende Reihen konvergieren oder nicht:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{1-2n}}{n^2 + 1}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1+3n}(n+1)}{n^2 3^n}$$

6.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k + 1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k + 2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k + 3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.

(ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.

- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$
- (b) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $b_n = \sup_{k \geq n} a_k$, ist fallend und die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $c_n = \inf_{k \geq n} a_k$, ist wachsend.
- (i) Wahr
- (ii) Falsch
- (iii) Kann man nicht sagen
- (c) Die Harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist
- (i) Konvergent
- (ii) Divergent