### 8.1. Streng monoton wachsende stetige Funktionen

Man definiert den Sinus hyperbolicus als

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(Exp(x) - Exp(-x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**(a)** Zeigen Sie, dass sinh stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

**(b)** Zeigen Sie, dass sinh streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

**(c)** Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$.

**(d)** Schliessen Sie, dass sinh bijektiv ist, und dass $\sinh^{-1}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Die Funktion $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Areasinus hyperbolicus*, und wird als arsinh geschrieben.

### 8.2. Gleichmässige Konvergenz 1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{x + \frac{1}{n}}.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $[0,1]$ gegen eine funktion $f$ konvergiert. Schreiben Sie $f$ explizit auf.

**(b)** Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig auf $[0,1]$?

### 8.3. Gleichmässige Konvergenz von gleichmässig stetige Funktionen

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von gleichmässig stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.
Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $f$ stetig ist.
Zeigen Sie, dass $f$ sogar gleichmässig stetig ist.

### 8.4. Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Betrachten Sie die folgende Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie jeweils, ob die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise und/oder gleichmässig konvergiert.

**(a)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{n}$

**(b)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(n\pi x)$

**(c)** $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{nx+1}$

**8.5. Online-MC**

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen $f, g$ sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

**(i)** $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$

**(ii)** $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $fg$

**(iii)** Wenn $f, g$ stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$

**(iv)** Wenn $f, g$ stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen $fg$

**(v)** Alle Aussagen sind inkorrekt

**(b)** Man nehme an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig konvergente Folgen von Funktionen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit Grenzfunktionen $f, g$ sind. Wählen Sie alle korrekten Antworten aus:

**(i)** $(f_n + g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $f + g$

**(ii)** $(f_n g_n)$ konvergiert gleichmässig gegen $fg$

**(iii)** Wenn $f, g$ stetig sind, so konvergiert $(f_n + g_n)$ gleichmässig gegen $f + g$

**(iv)** Wenn $f, g$ stetig sind, so konvergiert $(f_n g_n)$ gleichmässig gegen $fg$

**(v)** Alle Aussagen sind inkorrekt

**(c)** Betrachten Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie:

$$f_n(x) := \left(x - \frac{1}{n}\right)^2, \quad \forall x \in [0,1]$$

Bestimmen Sie, gegen welche Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Folge konvergiert und ob die Konvergenz gleichmässig ist.

**(i)** $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist gleichmässig

**(ii)** $f(x) = 1$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig

**(iii)** $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist gleichmässig

**(iv)** $f(x) = x^2$ und die Konvergenz ist nicht gleichmässig

**(v)** Es existiert ein $x \in [0,1]$, sodass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert