9.1. Potenzreihen

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradii der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

(b) Sei

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Sei $r' \in (0, r)$.
Zeigen Sie, dass f auf $[-r', r']$ gleichmässig stetig ist.

9.2. Berechnung von Limes

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie dass

$$\lim_{x \to +\infty} x^k \operatorname{Exp}(-x) = 0$$

Hinweis: *Bemerken Sie, dass* $Exp(-x) = 1/Exp(x)$ *und*

$$Exp(x) > \frac{x^{k+1}}{k+1!} \text{ für } x > 0$$

(b) Sei $\alpha > 0$ beliebig. Wir definieren für $x > 0$

$$x^\alpha = Exp(\alpha \operatorname{Log}(x)).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha Log(x) = 0$$

Hinweis: *Benützen Sie die Substitution* $y = -\alpha Log(x)$ *und das Limes*

$$\lim_{x \to 0^+} Log(x) = -\infty$$

9.3. Bernoulli-de L'Hôpital

Berechnen Sie die folgende Limes mithilfe des Bernoulli-de L'Hôpital Satzes

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{\mathrm{Log}(3x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-x-2}$

9.4. Umkehrsatz

Die Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus*, *Cosinus hyperbolicus* und *Tangens hyperbolicus* sind definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie Ableitungen der Funktionen $\cosh x, \sinh x$ und $\tanh x$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Sei f eine der obigen Funktionen. Bestimmen Sie

$$I_f = \{x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0\}$$

und bemerken Sie, dass für alle drei Funktionen I_f ein Intervall ist.

(c) Skitzieren Sie die Graphen der drei Hyperbelfunktionen.

(d) Benützen Sie den Umkehrsatz um zu zeigen, dass die drei Hyperbelfunktionen auf den entsprechenden Bereichen I bijektiv sind.
Man schreibt die Inverse der Hyperbelfunktionen als

$$\text{arcsinh} = (\sinh)^{-1}, \quad \text{arccosh} = (\cosh)^{-1}, \quad \text{arctanh} = (\tanh)^{-1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von arcsinh, arccosh und arctanh.

(e) Bestimmen Sie die Ableitungen von arcsinh, arccosh und arctanh (als Funktionen der Hyperbelfunktionen und ihren Inversen).

(f) Skitzieren Sie die Graphen der Funktionen arcsinh, arccosh und arctanh.

9.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

(a) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert gleichmässig auf $\mathbb{R}$.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(iii) Ich weiss nicht.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + \sin(x)}{x}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(i) Wegen Bernoulli-de L'Hôpital existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht.

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert wegen Bernoulli-de L'Hôpital.

(iii) Man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden und $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

(iv) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert, aber man kann Bernoulli-de L'Hôpital nicht anwenden.

(c) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(\cos(\sin(x)))$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

$f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))\cos(\cos(\sin(x)))$

$f'(x) = \cos(x)\sin(x)\cos(x)$

$f'(x) = -\cos(\sin(-\cos(x)))$

$f'(x) = -\cos(x)\cos(\sin(x))\sin(\cos(\sin(x)))$