### 10.1. Potenzreihen und Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Identität zu beweisen:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \forall x \in ]-1,1[$$

**(a)** Berechnen Siedie Ableitung der Funktion:

$$\frac{1}{1-x} \text{ auf } ]-1,1[$$

**(b)** Berechnen Sie nun die Ableitung derselben Funktion mittels der geometrischen Reihendarstellung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ auf } ]-1,1[$$

***Hinweis:*** *Benützen Sie Satz 5.4.2.*

**(c)** Folgern Sie die Identität aus der Aufgabenstellung durch Kombinieren der vorherigen Berechnungen.

### 10.2. Gleichmässige Konvergenz und Ableitungen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{(e^{-|x|}-1)^2 + e^{-2n}}.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f$ konvergiert. Schreiben Sie $f$ explizit auf.

**(b)** Konvergiert die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmässig?

### 10.3. Höhere Ableitungen und Taylor Reihen

**(a)** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitungen bis und mit 4-ter Ordnung

a) $f(x) := \cos(x)e^{\sin(x)}$

b) $f(x) := \log(1+x^2)$

c) $f(x) := e^x\cos(x) - x\sin(x)$

**(b)** Bestimmen Sie für jede der obigen Funktionen das Taylorpolynom zur Ordnung 4 um $x = 0$.

### 10.4. Taylor Approximation.

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x)$$

Wir wollen $f$ durch Taylor-Polynome $T_m f(x; a)$ in $a = 0$ approximieren. Hier ist $m$ die Ordnung des Polynoms.

Wir wissen, dass (bis auf die ersten 12 Dezimalstellen) $\cos(0.2) = 0.980066577841$ ist. Was ist die kleinste Ordnung $m$, damit der Näherungsfehler in $x = 0.2$ höchstens $10^{-10}$ ist?

Was ist in diesem Fall der Näherungsfehler in $x = 1$?

### 10.5. Online-MC

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- **(i)** $f$ ist injektiv.
- **(ii)** $f$ ist surjektiv.
- **(iii)** $f$ ist streng monoton wachsend.
- **(iv)** $f$ ist streng monoton fallend.
- **(v)** Keine der obigen Antworten.

**(b)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- **(i)** $f$ ist injektiv.
- **(ii)** $f$ ist surjektiv.
- **(iii)** $f$ ist streng monoton wachsend.
- **(iv)** $f$ ist streng monoton fallend.

**(v)** Keine der obigen Antworten.

**(c)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte:

$$2 \geq f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

**(i)** $f$ ist injektiv.

**(ii)** $f$ ist surjektiv.

**(iii)** $f$ ist streng monoton wachsend.

**(iv)** $f$ ist streng monoton fallend.

**(v)** Keine der obigen Antworten.