

11.1. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1,$

(b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall stets sein Maximum und Minimum annimmt.

11.2. Grenzwerte und Taylorpolynome

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe einer Taylorapproximation:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x \sin(x)^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}}$

11.3. Partielle Integration

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels partielle Integration:

(a) $\int_1^2 x \operatorname{Log}(x) dx,$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \cos(x) dx$

(c) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x \cos(2 - 3x) dx$

(d) $\int_0^3 (2 + 5x) e^{\frac{x}{3}} dx$

Hinweis: Für b) dürfen Sie die folgende trigonometrische Identität benutzen

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

11.4. Substitutionsregel

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels Substitutionsregel:

(a) $\int_{-2}^2 (3x^2 - 9x)^4 (6x - 9) dx,$

(b) $\int_0^1 (3x - 2x^3) e^{x^4 - 3x^2} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)} dx$

11.5. Konvexität

Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$

(b) $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -\log(x).$

(c) Die Heaviside-Funktion $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

11.6. Integration und Taylor Theorem

Berechnen Sie das folgende Limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_n^{n+1} \sqrt{x} dx - n^{\frac{1}{2}} \right)$$

Hinweis: Benützen Sie den Mittelwertsatz und/oder Taylor Theorem.

11.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 3 der Funktion f im Punkt 0?

$$f(x) := xe^x$$

(i) $x + x^2 + 1/2x^3$

(ii) $x + x^2 + x^3$

(iii) $1 + x + x^2 + 1/2x^3$

(iv) $1 + x + x^2 + x^3$

- (b)** Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x \log(x)$$

(i) $(x - 1) + 1/2(x - 1)^2 - 1/6(x - 1)^3 + 1/12(x - 1)^4$

(ii) $(x - 1) + 1/2(x - 1)^2 - 1/3(x - 1)^3 + 1/6(x - 1)^4$

(iii) $(x - 1) + 1/2(x - 1)^2 - 1/3(x - 1)^3 + 1/4(x - 1)^4$

(iv) $(x - 1) + 1/2(x - 1)^2 - 1/6(x - 1)^3 + 1/3(x - 1)^4$

- (c)** Welche der folgenden Rechnungen ist keine korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(i) $\int \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi = -\cos(\phi) \cos(\phi) - \int \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi.$

(ii) $\int \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi = \sin(\phi) \sin(\phi) - \int \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi.$

(iii) $\int x \log(x) dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \int \frac{x}{2} dx.$

(iv) $\int 2x^2 e^{x^2} dx = x e^{x^2} - \int e^{x^2} dx.$

- (v)** Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.