12.1. Integrale berechnen per Definition

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Treppenfunktion:

$$f_n(x) = \frac{k^2}{n^2} \quad \forall x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Erklären Sie, warum

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

und schliessen Sie dauraus, dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

(d) Schliessen Sie aus der obigen Teilaufgaben, dass

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

(e) Berechnen Sie mittels Riemannscher Summen das Integral

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Hinweis: *Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

12.2. Partialbruchzerlegung

Ziel dieser Aufgabe ist es, rationale Funktionen in einfachere Summanden zu zerlegen. Dies wird im Zusammenhang mit Integration ein wichtiges Hilfsmittel sein.

(a) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Machen Sie beide Summanden gleichnamig. Sie können aus der gewünschten Gleichheit **zwei** lineare Gleichungen in A, B herauslesen.

(b) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + Cx + D,$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest um den Grad des Zählers auf 1 zu reduzieren.

(d) Betrachten Sie die Funktion:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung der Form:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$. Vergewissern Sie sich, alle drei Summanden notwendig in der Zerlegung sind (d.h. $A, B, C \neq 0$).

Hinweis: Sie müssen nur eine geeignete Formulierung geben, diese aber nicht beweisen.

(e) Benutzen Sie Partialbruchzerlegungen, um die Stammfunktionen der folgenden Funktionen zu bestimmen:

- $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$
- $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$

12.3. Integrale

Berechnen Sie folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3-x}dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+2)^2}dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}dx,$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^{10}-x^7+3x}{x^3-1}dx.$

12.4. Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

(a) $y' - 3y = e^{5x}$,

(b) $y' - 3y = e^{3x}$,

(c) $y' - y = \sin x$,

(d) $y' - \frac{y}{x} = x$.

12.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche Substitution vereinfacht das folgende Integral:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}dx$$

(i) $y = \sin(x)$

(ii) $y = \cos(x)$

(iii) $y = 1 + \sin(x)^2$

(iv) Keine der obigen.

(b) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f im Punkt 1?

$$f(x) := x\log(x)^4$$

(i) 0

(ii) $(x-1)^4$

(iii) $(x-1)^3$

(iv) $(x-1)^2$

(c) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x\log(x)}dx$$

(i) $\log\left(\frac{\log(3)}{\log(2)}\right)$

(ii) $\frac{1}{2}(\log^2(3) - \log^2(2))$

(iii) $-\frac{5}{36}$

(iv) $\arctan(\log(3)) - \arctan(\log(2))$

(d) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}$$

(i) $\arctan(\sin(x)) + c$

(ii) $\arccos(\sin(x)) + c$

(iii) $\log(\sin(x)) + c$

(iv) $\log(\tan(x)) + c$

(e) Wählen Sie die Stammfunktion zu der folgenden Funktion aus:

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

(i) $\log(1 + \sin(x)) + c$

(ii) $\log(\sin(x)) + c$

(iii) $\arctan(1 + \sin(x)) + c$

(iv) $\arctan(\sin(x)) + c$