13.1. Uneigentliche Integrale

Sei f Riemann-integrabel. Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls das Limes

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

existiert, schreibt man

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

und das obige Limes wird uneigentliches Integral benannt.
Berechnen Sie die folgende uneigentliche Integrale, falls das entsprechende Limes existiert. Sonst erklären Sie, warum das Limes nicht existiert.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx.$

13.2. Stammfunktionen per Rekursion berechnen

Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für jedes $n \in \mathbb{N}$, um die Stammfunktionen zu folgenden Funktionen bestimmen zu können:

$$\cos(x)^n, x^n e^x, \log(x)^n$$

Berechnen Sie dann alle Stammfunktionen für $1 \leq n \leq 6$.

13.3. Ableiten von Parameterintegralen

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_0^{\sin(t)} e^{-x^2} dx$$

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung sowie die Kettenregel.

13.4. Potenzreihe und Ableitung

Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n}.$$

Hinweis: *Für $x \in (-1,1)$ sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Drücken Sie die obige Reihe als Wert von f' aus.

13.5. Potenzreihe und Integration

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in (-1,1)$

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}.$$

(b) Folgern Sie aus Teilaufgabe (a) dass für $x \in (-1,1)$

$$\log(1+x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}.$$

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(x) = f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussage ist wahr?

(i)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(iv) Keine der obigen.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f(x) = -f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussage ist wahr?

(i)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(iii)
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(iv) Keine der obigen.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

(i) 4

(ii) 4π

(iii) 2

(iv) π

(d) Finden Sie die Stammfunktion der folgende Funktion auf $(0,\infty)$

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$$

(i) $\frac{1}{x^3}$

(ii) $\frac{x\log(x)-x}{2x}$

(iii) $-\frac{\log(x)+1}{x}$

(iv) $\frac{\log(x)}{x}$