14.1. Kreise und Gerade in der komplexen Ebene

Wir erinnern uns, dass ein *Kreis* in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch eine Gleichung der Form:

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2,$$

wobei alle (x, y), welche diese Identität erfüllen, auf dem Kreis mit Mittelpunkt (m_x, m_y) mit Radius r liegen. Eine *Gerade* ist hingegen gegeben durch:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

wobei alle (x, y), welche die Identität erfüllen, auf einer Gerade liegen mit Steigungsvektor $(-b, a)$ und c die Entfernung zum Ursprung parametrisiert. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine einheitliche Beschreibung von Geraden und Kreisen in der komplexen Ebene zu erhalten.

(a) Nutzen Sie die Zerlegung von komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil, um zu beweisen, dass die folgenden Gleichungen Kreise bzw. Geraden in der Ebene darstellen:

(i.) $|z|^2 - 1 = 0$

(ii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} = 0$

(iii.) $|z|^2 - iz + i\overline{z} - 2 = 0$

(iv.) $-iz + i\overline{z} + 1 = 0$

Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Beweisen Sie durch Umformen der Identität und unter der Verwendung des Real- und Imaginärteils von z, dass die folgende Identität:

$$a|z|^2 + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0,$$

einen Kreis bzw. eine Gerade parametrisiert für eine beliebige komplexe Zahl b sowie reelle Zahlen a, c mit $|b|^2 - ac > 0$. Gilt auch die Umkehrung, d.h. lassen sich alle Kreise und Geraden in der Ebene durch eine solche Identität beschreiben?

(c) Verwenden Sie die Darstellung aus der vorherigen Teilaufgabe, um zu zeigen, dass die Inversionsabbildung, welche z seine Inverse z^{-1} zuordnet, Kreise und Geraden mit dem Koeffizienten $c \neq 0$ auf Kreise und Geraden abbildet. Denken Sie darüber nach, was im Falle eines Kreises bzw. einer Geraden mit $c = 0$ passiert.

14.2. Konvergenzverhalten auf dem komplexen Rand

(a) Betrachten Sie die Potenzreihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und beweisen Sie, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$ divergiert.

(b) Betrachten Sie die Potenzreihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(c) Betrachten Sie die Potenzreihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$
Bestimmen Sie den Konvergenzradius R und bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

Hinweis: Es ist hilfreich zu bemerken, dass jede komplexe Zahl x mit $|x| = 1$ die Form $x = e^{i\varphi}$ besitzt, für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie geometrische Summationsformeln für Ausdrücke der Form $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ mit $q \in \mathbb{C}$.

14.3. Zwischenwertsatz für Ableitungen

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Version des Zwischenwertsatzes für Ableitungen zu beweisen.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
Beweisen Sie, dass f stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist, aber f' unstetig in 0 ist.

(b) Es sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und stetig und wir nehmen an, dass die Grenzwerte:
$$f'(a_+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(b_-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

existieren. Zeigen Sie, dass wenn $f'(a_+) > 0 > f'(b_-)$, dann erreicht f ein globales Maximum auf $[a, b]$ im Inneren des Intervalls, d.h. an einer Stelle $c \in]a, b[$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $f'(a_+) > 0$ impliziert, dass für $x > a$ nahe genug auch gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Daher gilt für x nahe a auch $f(x) > f(a)$. Begründen Sie dies genau und folgern Sie eine ähnliche Ungleichung für $f'(b_-)$.

(c) Es sei nun $f'(a_+) > \gamma > f'(b_-)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Begründen Sie mittels der Funktion $g(x) = f(x) - \gamma x$ und den Überlegungen aus der vorherigen Teilaufgabe, dass ein $c \in]a, b[$ existiert, sodass:

$$g'(c) = f'(c) - \gamma = 0$$

(d) Folgern Sie mittels der vorherigen Teilaufgabe, dass wenn $f'(a_+) > f'(b_-)$, dann nimmt f' jeden Wert in $]f'(b_-), f'(a_+)[$ an.

(e) Nehmen Sie nun an, dass $f'(a_+) < f'(b_-)$. Wie können Sie in diesem Fall aus den vorherigen Teilaufgaben folgern, dass f' jeden Wert in $]f'(a_+), f'(b_-)[$ annimmt?

Hinweis: Wie müssen Sie f verändern, damit die vorhergehende Diskussion sich anwenden lässt?

14.4. Grenzwerte

Berechnen Sie die folgende Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)-\log(n)}{\log(n+1)-\log(n)}$.

14.5. Parameterabhängige Integrale

Sei $f[0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig so dass

$$\int_0^{x^2+x^3} f(t)dt = x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Bestimmen Sie $f(2)$.

Hinweis: Es sei F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Schreiben Sie das Integral um mittels F und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung. Wenn Sie auf beiden Seiten nach x ableiten und $F' = f$ verwenden, sollten Sie der Lösung nahe kommen.

14.6. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 1 Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion, sodass Zahlen $k, K \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$kf(x) \leq f'(x) \leq Kf(x), \quad \forall x \in]0,1[$$

(a) Es sei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Berechnen Sie die Ableitung von $g_C(x) := f(x)e^{-Cx}$.

(b) Betrachten Sie nun f wie in der Aufgabenstellung. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$f(0)e^{kx} \leq f(x) \leq f(0)e^{Kx}, \quad \forall x \in [0,1]$$

(c) Falls $k = K$, d.h.:

$$f'(x) = Kf(x), \quad \forall x \in]0,1[,$$

folgern Sie, dass $f(x) = f(0)e^{Kx}$.

14.7. Abschätzungen aus Ableitungen, Teil 2 Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin(x), \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

(a) Beweisen Sie, dass es genügt, die folgende Ungleichung:

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

zu zeigen, wobei $g(x) := \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ für alle $x \in [0, \pi/2]$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum von g mittels des Ableitungskriteriums und den Randwerten.

Hinweis: g erreicht sicher ein Minimum auf $[0, \pi/2]$. Weshalb? Wir weisen darauf hin, dass das Minimum auch in 0 oder $\pi/2$ angenommen werden kann und dort das Ableitungskriterium für Extremalstellen fehlschlägt, vergleiche mit dem Beispiel $h(x) := x^2$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Man bemerke, dass mittels des Monotonie-Kriteriums bestimmt werden kann, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

(c) Nutzen Sie die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgabe, um die gesuchte Ungleichung zu beweisen.

14.8. Uneigentliche Integrale Berechnen Sie die folgende uneigentliche Integrale

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{2+x^2}\,dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 \sin(e^x)e^x\,dx$

(c) $\int_0^\infty 2^{-x}\,dx$

14.9. Konvergente Teilfolgen

Welche der folgenden Folge besitzt eine konvergente Teilfolge?

(a) $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $(n\sin(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(n+\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{1}{n}\sin(n)+n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

14.10. Partielle Summation

Beweisen Sie die partielle Summationsregel

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1-\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

14.11. Extremalstellen

Bestimmen Sie die globalen Extremalstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f:[-2,2]\to\mathbb{R};\quad x\mapsto x^3-x^2-8x+1,$

(b) $f:[-1,\frac{1}{2}]\to\mathbb{R};\quad x\mapsto \frac{x+1}{x^2+1},$

(c) $f:[-1,2]\to\mathbb{R};\quad x\mapsto (x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

14.12. Längenberechnung Sei $v\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$, $t\mapsto(v_1(t),\dots,v_n(t))$ eine differenzierbare Abbildung (eine Kurve). Wir nennen $\dot v(t)=(\dot v_1(t),\dots,\dot v_n(t))$ den Tangentialvektor an v bei t und $d\mathbf{s}=|\dot v(t)|dt$ das Linienelement. Wir definieren die Länge von v als

$$L(v):=\int_a^b d\mathbf{s}=\int_a^b|\dot v(t)|dt.$$

(a) Sei $v(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t),t)$, $t\in[0,1]$. Berechnen Sie die Länge der Kurve und skizzieren Sie sie.

(b) Sei $v(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$ für f differenzierbar. Wie sieht die Formel für die Länge dieses Graphen aus?

14.13. Ableitungen, Integrale und Grenzwerte

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Ableitungen: Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit.

a) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \cos(x^{-x})$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$

c) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f(x) := \frac{\arctan(x)}{1-x^2}$

(b) Integrale: Lösen Sie die folgenden Integrale explizit.

a) $\int_1^2 \log(x)dx$

b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan(x))dx$

d) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

e) $\int_0^1 \log(1 + x^2)dx$

f) $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$

g) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \log(\sin(x))dx$

(c) Grenzwerte: Bestimmen Sie die Grenzwerte unter Verwendung aller Techniken aus der Vorlesung.

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x}$$

b)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \sin(3x)}{\cos(2x)}$$

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$$

d)
$$\lim_{x\to 0} (1 + 2\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

e)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{x}$$

f)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

g)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Hinweis: Zumal diese Aufgaben mittlerweile Routine sind, werden hierzu nur teilweise explizite Lösungen veröffentlicht. Sie können Ihre Lösungen auch auf WolframAlpha prüfen und bei Fragen den Organisator kontaktieren.