### 0.1. Kompaktheit

Seien $-\infty < a < b < \infty$.

**(a)** Zeigen Sie: jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ besitzt eine konvergente Teilfolge, die zu einem Punkt in $[a,b]$ konvergiert.

**(b)** Bemerken Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1[$ gibt, die zu $c \in \mathbb{R}$ konvergiert mit $c \notin [0,1[$.

**(c)** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei

$$f([a,b]) = \{f(x) | x \in [a,b]\}.$$

Zeigen Sie: jede Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f([a,b])$ besitzt eine konvergente Teilfolge, die zu einem Punkt in $f([a,b])$ konvergiert.

**(d)** Folgern Sie, dass $f$ sein Maximum und Minimum in $[a,b]$ annimmt.

**0.2. Grenzwerte** Berechnen Sie die folgende Grenzwerte

**(a)** $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)-x}{\cos(x)-1}$

**(b)** $\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$

### 0.3. Konvexität

Sei $I$ ein offenes Interval. Sei $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ heisst *konvex* auf $I$, falls $\forall x_0, x_1 \in I$, $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0).$$

**(a)** Sei $f \in C^2(I)$. Zeigen Sie: $f$ ist konvex auf $I$ genau dann wenn

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$$

**(b)** Welche der folgenden Funktionen sind konvex? Wenn sie nicht konvex sind, auf welchem Teilintervall des Definitionsbereiches sind sie konvex?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \log(1+x^2)$
- $f : ]0,\infty[ \to \mathbb{R}, f(x) := \log(x)^2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \max\{x^2, -x^2\}$

**(c)** Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen in $C^2(I)$ und $I$ ein offenes Intervall. Man nehme an, dass $f$ und $g$ beide konvex sind. Zeigen Sie, dass $fg$ nicht konvex sein muss.

**(d)** Es seien $f, g$ wie in der letzten Teilaufgabe. Nehmen Sie an, dass $f, g \geq 0$ beide monoton wachsend sind. Ist dann $fg$ konvex?

### 0.4. Mittelwertsatz für Integrale

Seien $-\infty < a \leq b < \infty$. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Beweisen Sie, dass ein $c \in [a, b]$ existiert, sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)dx$$

### 0.5. Nullstellen, Fixpunkte,...

**(a)** Hat die Gleichung

$$x^4 = (x+1)(x^2+5)$$

(mindestens) eine Lösung auf $\mathbb{R}$?

**(b)** Zeigen Sie: das Polynom

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8$$

hat genau eine Nullstelle.

**(c)** Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(0, 1)$ differenzierbar. Nehmen Sie an, dass

$$|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Zeigen Sie, dass es höchstens ein Punkt $c \in [0, 1]$ existiert, so dass $f(c) = c$.

**(d)** Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass $f(0) \geq 0$ und $f(2) \leq 4$. Zeigen Sie: es existiert $c \in [0, 2]$, so dass $f(c) = c^2$

**(e)** Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

### 0.6. Taylorreihen

**(a)** Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.
Für jedes $x \in (-R, R)$ sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\Big|_{x=0} = k! a_k.$$

**(b)** Finden Sie die Taylorreihen von $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{2+x}$ und $\frac{1}{x-3}$ in der Nähe von 0. Sie dürfen bekannte Taylorreihen verwenden.

**(c)** Finden Sie die Taylorreihe von $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in $x = 0$.

**(d)** Berechnen Sie den Anfang der Taylor-Reihe der Funktion

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + x}\,,$$

mit Entwicklungspunkt 0 bis einschliesslich des Gliedes 3. Ordnung.

## 0.7. Ableitungen, Integrale

**(a)** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen explizit:

$$f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^{-x}.$$

**(b)** Lösen Sie die folgenden Integrale explizit:

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\log(x))dx.$$