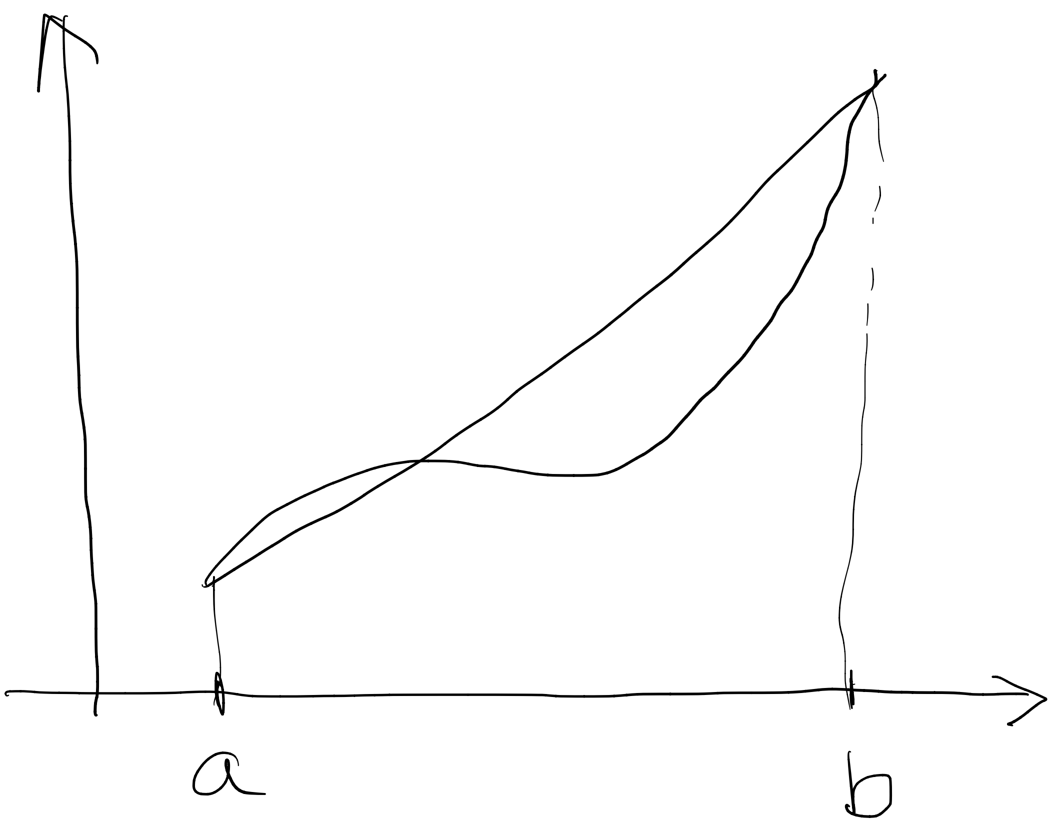
V DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

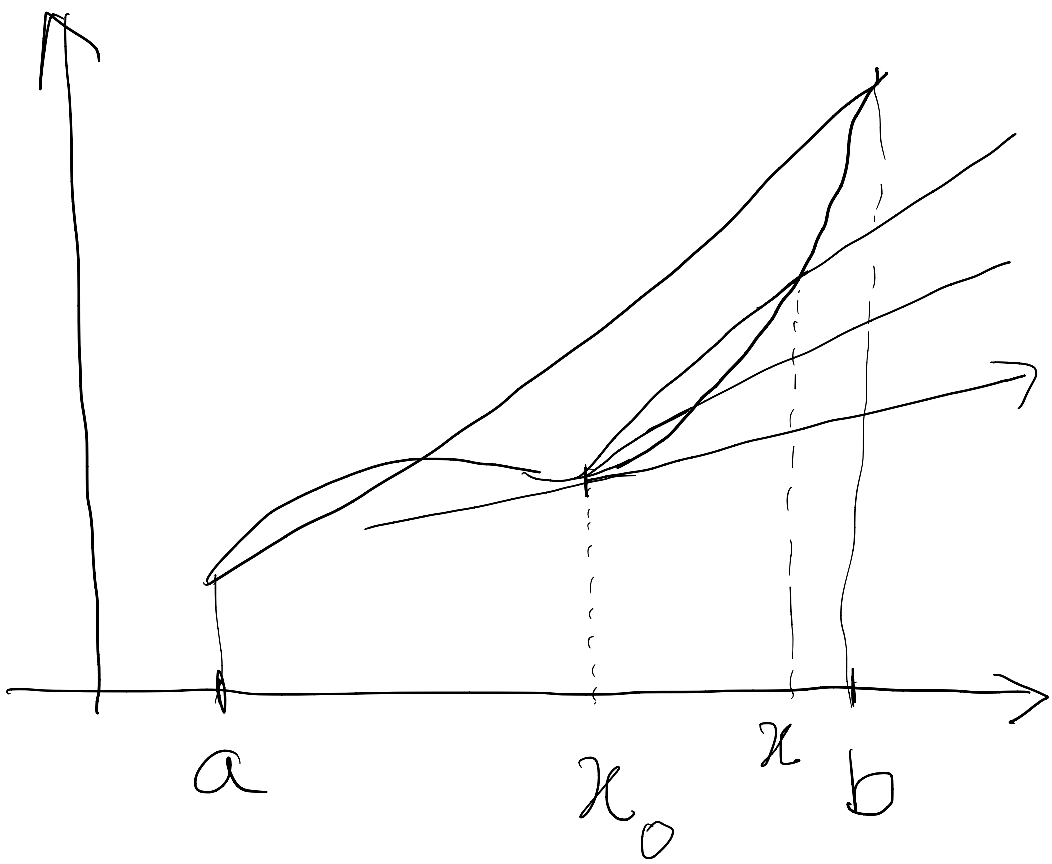
V.1 Differential und Differentiationsregeln

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$



Steigung zwischen a und b

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Infinitesimale Steigung

V.1.1 Definition

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ wobei Ω ein offenes Intervall der Form $]a, b[$ ist. f heisst an der Stelle $x_0 \in]a, b[$ differenzierbar falls den folgenden

Grenzwert existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dieser Limes wird

$f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$

notiert und heisst

die Ableitung (das Differential)

von f an der Stelle x_0

(ii) Analog heisst $f = (f_1 \cdots f_n)$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

an der Stelle x_0 differenzierbar

falls jede der

Komponentfunktionen

f_i $i = 1 \cdots n$ an der Stelle

x_0 differenzierbar ist

und

$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), f_2'(x_0) \cdots f_n'(x_0) \right)$

f heisst auf Ω diff. falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

V.1.2 Beispiele und Gegenbeispiele

i) $f(x) = mx + b$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x-x_0)}{x-x_0} = m$$

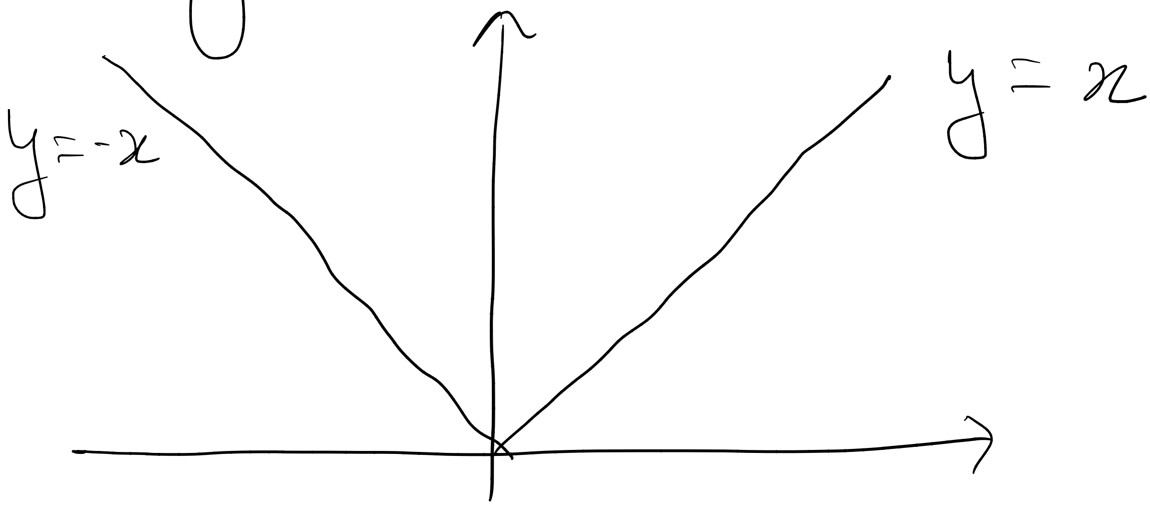
ii) $f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{l=0}^{k-1} x^l x_0^{k-1-l}$$

$$= k x_0^{k-1}$$

Also $f'(x_0) = k x_0^{k-1}$

iii) $f(x) = |x|$



$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +1$$

$$\neq \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$$

iv) $$\operatorname{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Beobachtung:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0^{k-1}\,k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\boxed{k-1=l}$ Variabel Wechsel

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!}\right](x_0) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{x_0^{l}}{l!}$$

Intuition sagt

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right](x_0)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x_0^l}{l!} = \operatorname{Exp}(x_0)$$

Aber Vorsicht ⚠

Man hat bewiesen

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k-x_0^k}{k!}}{x-x_0} \quad (1)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_0^k}{k!}$$

Aber man möchte gern beweisen

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{Exp}(x)-\operatorname{Exp}(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\operatorname{Exp}(x_0)$$

d. h.

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{x^k - x_0^k}{k!}}{x - x_0}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^k}{k!} \qquad 2$$

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} \left(\cdots\cdots \right)$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} \left(\cdots\cdots \right)$$

Die Beide sind identisch

grund

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$$

$|x_0| < \rho$ dann

dürfen wir sagen

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0}$$

Insbesondere für

$\mathrm{Exp}(x) \quad \rho = +\infty$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\underline{\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0}$$

$$= \underline{\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0}$$

$$= \operatorname{Exp}(x_0)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Exp}(x)\,(x_0) = \operatorname{Exp}(x_0)$$

$$x \longmapsto \operatorname{Exp}(ix)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x_0^k}{k!}}{x - x_0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} i^k \frac{k}{k!} x_0^{k-1}$$

$$= i \sum_{k=1}^{n} \frac{i^{k-1} x_0^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\boxed{k-1=l}$

$$\lim_{n \to \infty} i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{i^l x_0^l}{l!} = i \operatorname{Exp}(i x_0)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Exp}(ix)(x_0)$$

$$= i \operatorname{Exp}(ix_0)$$

Das ist ok

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k!}}} = \infty$$

$$|x_0| < \infty$$

$$\boxed{\cos x := \frac{\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix)}{2}}$$

$$\overline{\operatorname{Exp}(ix)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}}$$

$$\overline{(ix)^k} = \left(\overline{ix}\right)^k$$

$$= (-ix)^k$$

$$\overline{\operatorname{Exp}(ix)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!}$$

$$= \operatorname{Exp}(-ix)$$

$$\cos x = \frac{\operatorname{Exp}(ix) + \overline{\operatorname{Exp}(ix)}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$z = a + ib$$

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$$

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = b = \operatorname{Im}(z)$$

$$\sin x = \frac{\operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(-ix)}{2i} \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k + (-ix)^k}{k!}$$

$$(ix)^{2p+1} + (-ix)^{2p+1} = 0$$

$\forall p \in \mathbb{N}$

$$\cos x = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2p} + (ix)^{2p}}{(2p)!}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} i^{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

Man beweist

$$\sin x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

$$\cos x = \operatorname{Re} \operatorname{Exp}(ix)$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(ix_0)}{x - x_0} \right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{Exp}(ix) - \mathrm{Exp}(ix_0)}{x - x_0} \right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(i \, \mathrm{Exp}(ix_0) \right)$$

$$\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Re}(-b + ia)$$

$$= -b$$

$z = a + ib$

$$= -\mathrm{Im}(z)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x \, (x_0)$$

$$= - \operatorname{Im}\left(\operatorname{Exp}(i x_0) \right)$$

$$= - \sin x_0$$

$$\boxed{\cos' x = - \sin x}$$

in einer ähnlichen Weise hat man

$$\sin' x = \cos x$$

V.1.3 Bemerkung

f an der Stelle x_0 differenzierbar

$\Rightarrow f$ " " " stetig

Warum ?

$x_k \to x_0$ Frage $f(x_k) \underset{?}{\to} f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = f'(x_0)$$

$$\underbrace{(x_k - x_0)}_{\downarrow \atop 0} \; \underbrace{\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}}_{\downarrow \atop f'(x_0)}$$

$$\lim_{k \to \infty} \cancel{(x_k - x_0)} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{\cancel{x_k - x_0}}$$

$$= 0$$

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) - f(x_0) = 0$$

$\square$

⚠ Stetig $\not\Rightarrow$ Diff an der Stelle x_0
an der Stelle x_0

$f(x) = |x|$ an der Stelle 0

V.1.4 Eigenschaften des Differentials

Satz Seien $f, g\ \Omega \to \mathbb{R}$ beide an der Stelle x_0 diff.

Dann ist

i) $f+g$ an der Stelle x_0 diff. und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ii) fg . . . . . . x_0

diff. . . . .

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

iii) Falls $g(x_0) \neq 0$

dann ist $\frac{f}{g}$ an der

Stelle x_0 differenzierbar

und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - g'(x_0)\,f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Bemerkung

g an der Stelle x_0 diff

$\Rightarrow g$ " " x_0 stetig

Da $g(x_0) \neq 0$

$\exists\, \delta$ so dass $|x - x_0| < \delta$

gilt $g(x) \neq 0$

$\left(\delta \text{ für } \varepsilon = \dfrac{|g(x_0)|}{2} \right)$

Dann wird $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

auf dieser Strecke

wohl definiert

Beweis $\longrightarrow$ Übung

V.1.5 Satz (Kettenregel)

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar

Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar

und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Beweis Sei x mit

$$f(x) \neq f(x_0)$$

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \; \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= g'(f(x_0))$$

Warum $x_k \longrightarrow x_0$

$y_k = f(x_k) \qquad y_0 = f(x_0)$

$$\frac{g \circ f(x_k) - g \circ f(x_0)}{f(x_k) - f(x_0)} = \frac{g(y_k) - g(y_0)}{y_k - y_0}$$

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$$

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k)-g(y_0)}{y_k-y_0} = g'(y_0)$$

Wir habe bewiesen dass

$$\underline{\underline{\forall\, x_k \to x_0}}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{g(f(x_k)) - g(f(x_0))}{f(x_k) - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[g \circ f(x)\right](x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

V.1.6 Beispiel

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{Exp}\left(x^2+x\right)\right](x_0)$$

$$= \operatorname{Exp}\left(x_0^2+x_0\right) \quad \left(2x_0+1\right)$$

V.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

V.2.1 Satz

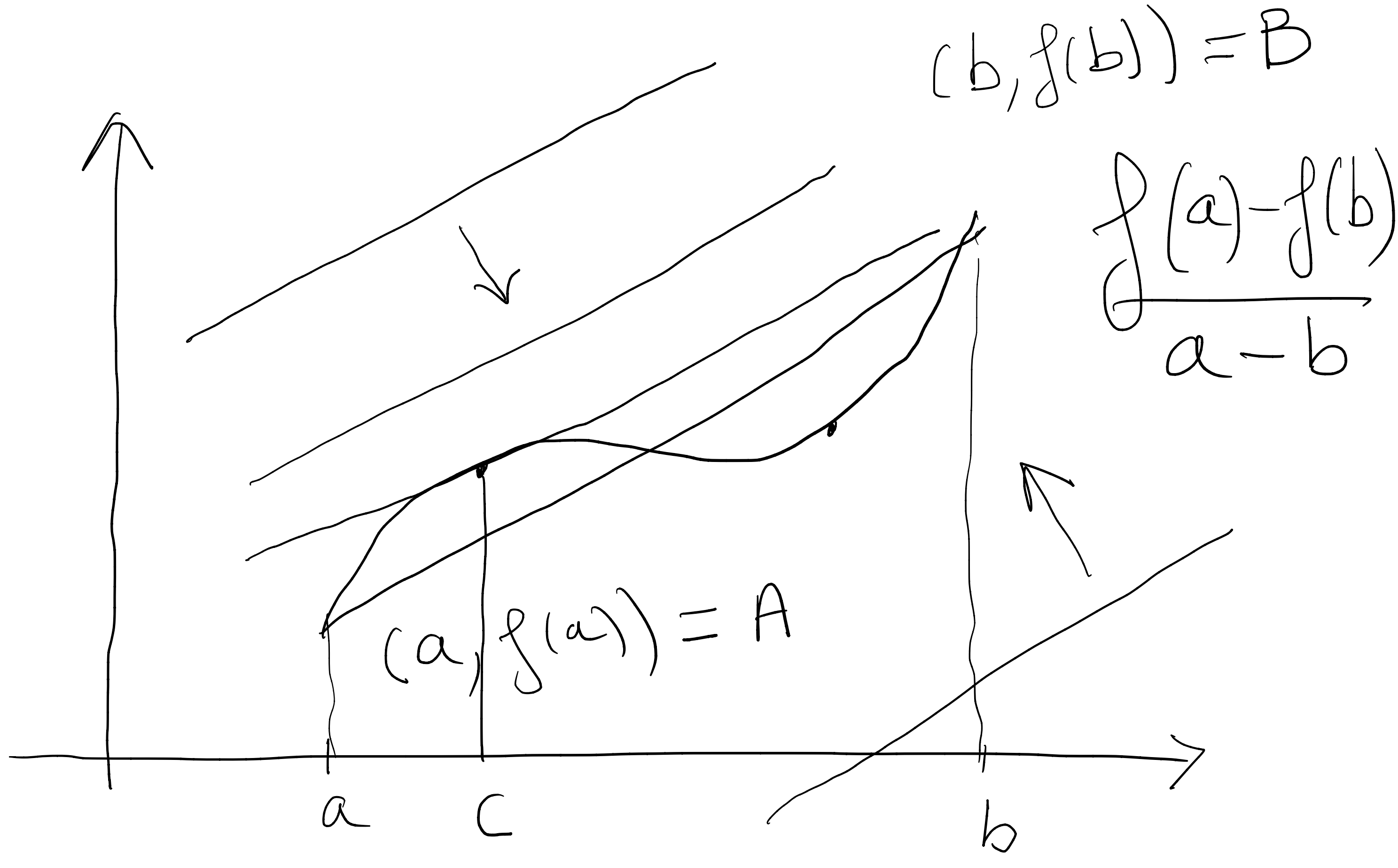
Seien

$$-\infty < a < b < +\infty$$

Sei $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ an jeder Stelle differenzierbar

$\exists\, c \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$$



Beweis vom Mittelwertsatz

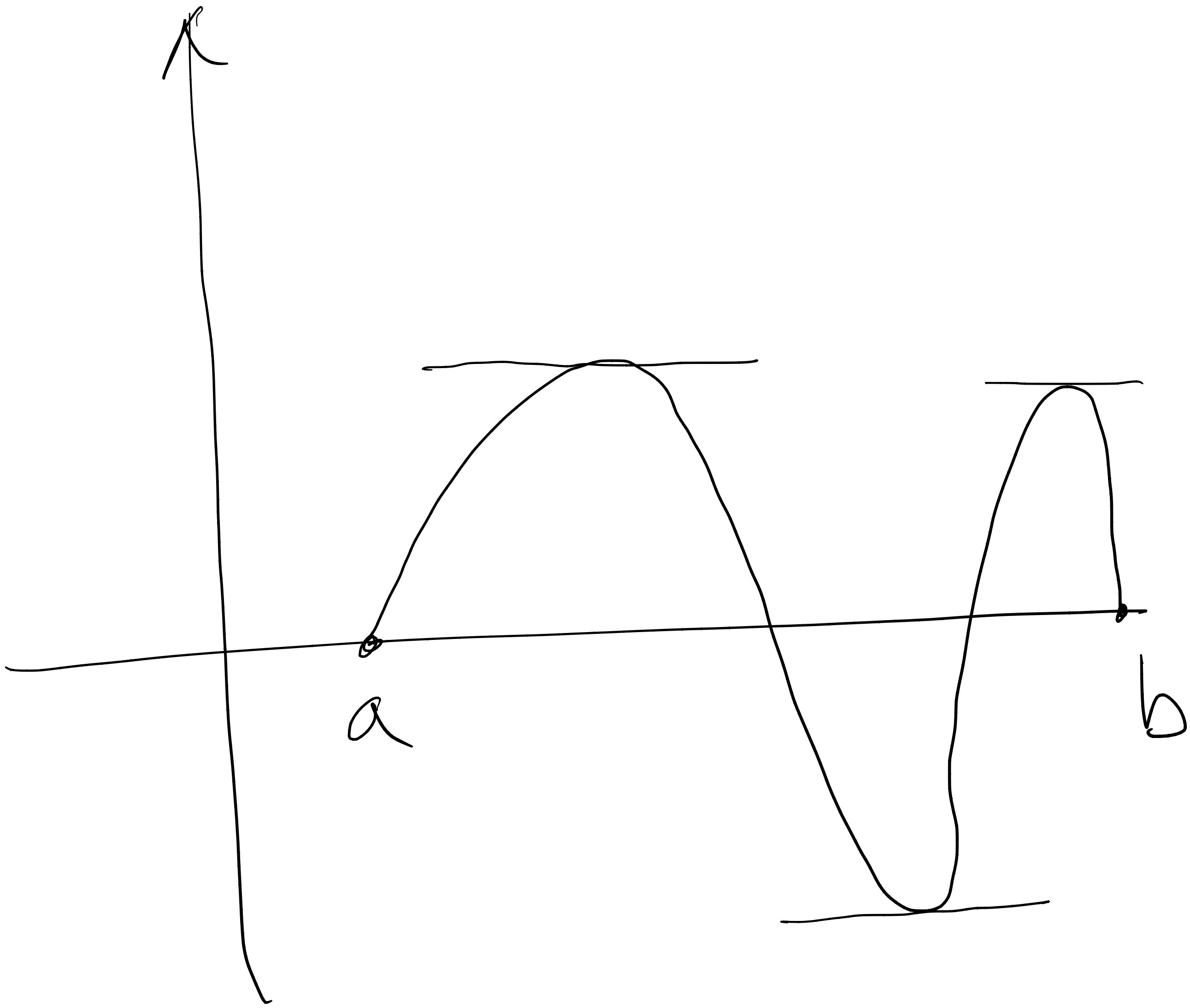
Wir betrachten zuerst den Fall

$$f(a) = f(b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Frage $\exists\, c \in \,]a, b[$

mit $\underline{f'(c) = 0}$



$$\inf\{f(x),\ x \in [a,b]\}$$

$$= f(\underline{x})$$

IV.7 (f ist auf $[a,b]$ stetig)

$$\sup\{f(x);\ x\in[a,b]\}$$

$$= f(\overline{x})$$

Entweder $f(\underline{x})<0$

oder $f(\overline{x})>0$

Sonst ist die Funktion

f überall 0 $\left(f\equiv 0 \Rightarrow f'(x)=0 \ \forall x\in\,]a,b[\right)$

$f(\bar{x}) > 0$

$\forall x \in [a, b]$ gilt

$f(\bar{x}) \geq f(x)$

$$\frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x} \begin{cases} \geq 0 & x \geq \bar{x} \\ \leq 0 & x \leq \bar{x} \end{cases}$$

dann muss $f'(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow$ Satz

Der Fall $f(a) = f(b) = 0$ wird gelöst

Allgemein

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$g(a) = 0$

$g(b) = 0$

g ist auf $[a, b]$ stetig

g ist auch auf $]a,b[$ überall differenzierbar

Dankt der erste Teil des Beweises

$\exists c$ mit $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

d.h. $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$\square$

Donnerstag den 17ten November

Zusammenfassung von Gestern

V DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

V.1 Differential und Differentiationsregeln

V.1.1 Definition

V.1.2 Beispiele und Gegenbeispiel

i) $f(x) = mx + b \qquad f'(x) = m$

ii) $f(x) = x^k$ oder allgemeiner

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}}$$

iii) Gegenbeispiel $f(x) = |x|$

an der Stelle 0

iv) $$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[\mathrm{Exp}(x)\Big](x_0) = \mathrm{Exp}(x_0)$$

v) $$\mathrm{Exp}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[\mathrm{Exp}(ix)\Big](x_0) = i\,\mathrm{Exp}(ix_0)$$

vi) $$\cos x = \frac{\mathrm{Exp}(ix) + \mathrm{Exp}(-ix)}{2}$$

und $$\sin x = \frac{\mathrm{Exp}(ix) - \mathrm{Exp}(-ix)}{2i}$$

$$\cos x = \mathrm{Re}\Big[\mathrm{Exp}(ix)\Big]$$

$$\sin x = \mathrm{Im}\Big[\mathrm{Exp}(ix)\Big]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos x\right](x_0) = -\sin x_0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right](x_0) = \cos x_0$$

V.I.3 Satz

f an der Stelle x_0 differenzierbar

$\Rightarrow$ f an der Stelle x_0 stetig

Die Reziprok ist nicht wahr

V.I.4 Eigenschaften des Differentials

$f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beide an der Stelle x_0 differenzierbar

Dann

i) $f+g$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ii) fg 〃 〃 x_0

〃 〃 〃

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)},$$

iii) $g(x_0) \neq 0$ dann

$\frac{f}{g}$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

V.1.5 Satz (Kettenregel)

$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diff

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $f(x_0)$ diff

dann ist $g \circ f$ " " x_0 diff

und es gilt

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)}$$

V.1.6 Beispiel

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{Exp}(x^2+x)\right](x_0) = \operatorname{Exp}(x_0^2+x_0)(2x_0+1)$$

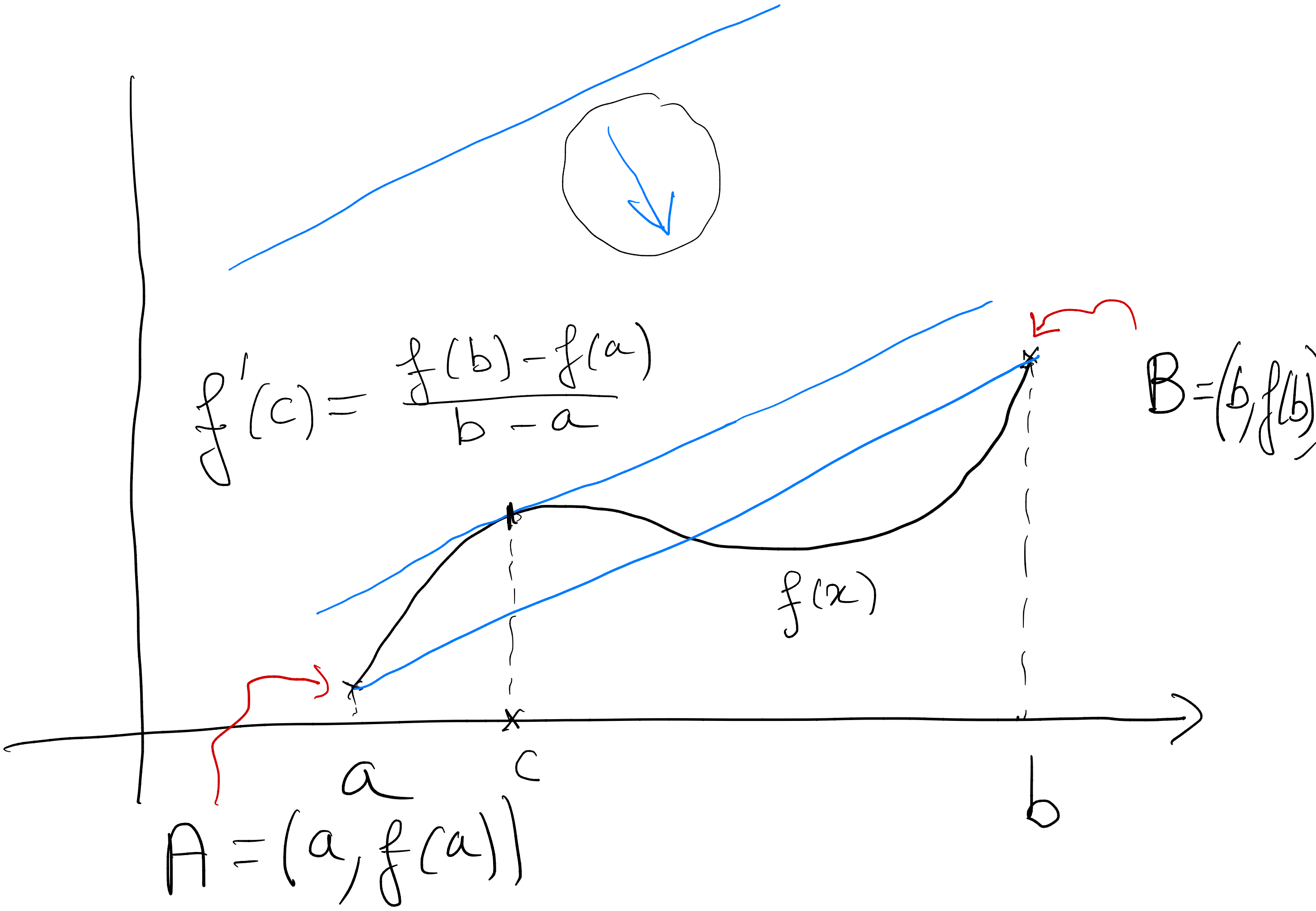
V.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

V.2.1 Satz $-\infty < a < b < +\infty$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ an jeder Stelle differenzierbar dann

$\exists\, c \in\,]a,b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



V.2.2 Korollar

f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ überall differenzierbar

i) Falls $f' \equiv 0$

$$(\forall x \in]a,b[\; f'(x)=0)$$

$\Rightarrow$ f ist konstant

ii) Falls $f' \geq 0$ $\left(\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geq 0\right)$

Dann ist f Monoton wachsend

iii) Falls $f' > 0$ $\left(\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0\right)$

Dann ist f streng monoton wachsend

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c) > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c \in]x_1, x_0[\\ \text{Wobei } \quad x_1 > x_0 \\ \Rightarrow f(x_1) > f(x_0) \end{array}}$$

V.2.3 Anwendung

Sei f auf $\mathbb{R}$ überall differenzierbar mit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \lambda f(x) \quad (*)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann $\exists \underline{c} \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = c e^{\lambda x}$$

Beweis

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boxed{e^{-\lambda x} f'(x) = \lambda e^{-\lambda x} f(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x$$

$$\frac{d}{dx}(-\lambda x) = -\lambda$$

Kettenregel $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left[\exp(-\lambda x)\right] = -\lambda \exp(-\lambda x)$$

$$e^{-\lambda x} f'(x) \underbrace{- \lambda e^{-\lambda x}}_{} f(x) = 0$$

$$e^{-\lambda x} f'(x) + \frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x}\right] f(x) = 0$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x} f(x)\right]$$

Korollar $\Rightarrow$ $e^{-\lambda x} f(x) = c$

$$\underbrace{e^{\lambda x} e^{-\lambda x}}_{\overset{\shortparallel}{e^0 = 1}} f(x) = c\, e^{\lambda x}$$

Additionstheorem

V.2.4 Satz (Bernoulli de l'Hospital)

Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ überall differenzierbar so dass

i) $f(a) = g(a) = 0$

ii) $\forall x \in]a,b[\quad g'(x) \neq 0$

iii) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Dann ist $\underline{g(x) \neq 0}$ $\forall x > a$

und es gilt

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

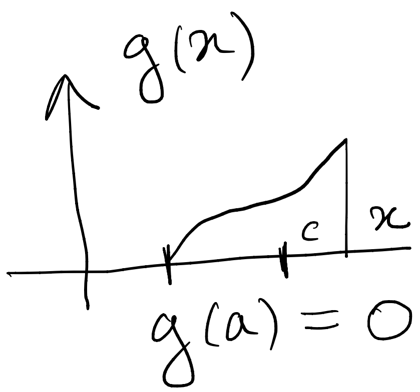
Beweis vom Satz

i) warum gilt $g(x) \neq 0$?

Der Grund

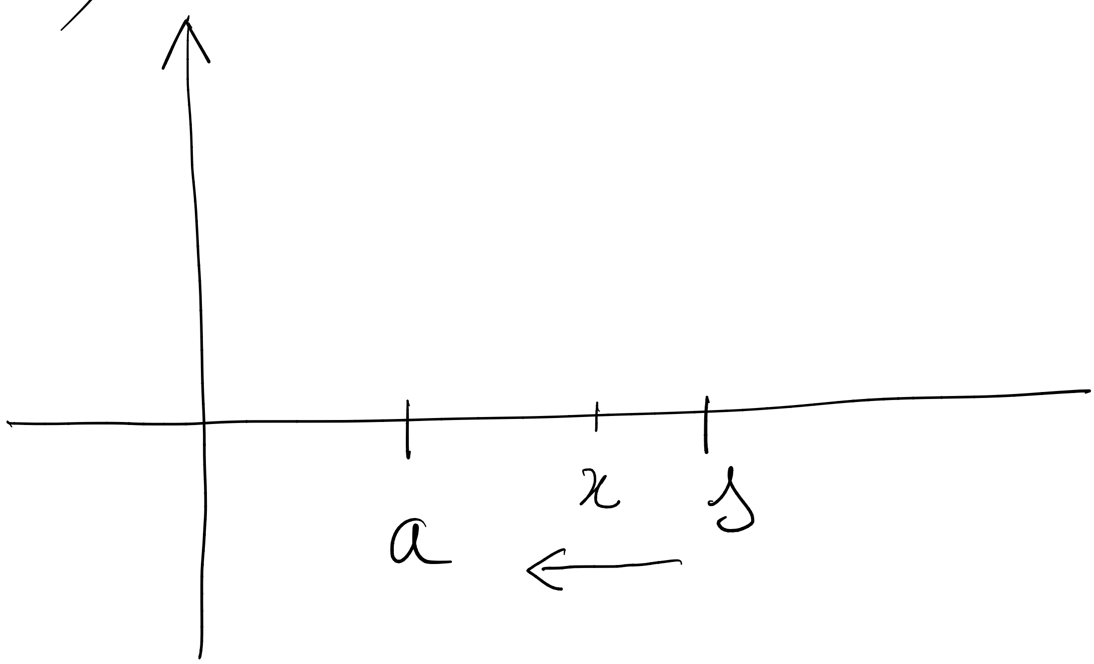
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(c) \neq 0$$

$\exists\, c \in]a, x[$



$\Rightarrow g(x) \neq 0$

ii)



$$h(x) := \frac{f(\delta)}{g(\delta)}\, g(x) - f(x)$$

Beobachtung

$$h(a) = 0 \qquad h(\delta) = 0$$

h ist auf $[a,\delta]$ stetig

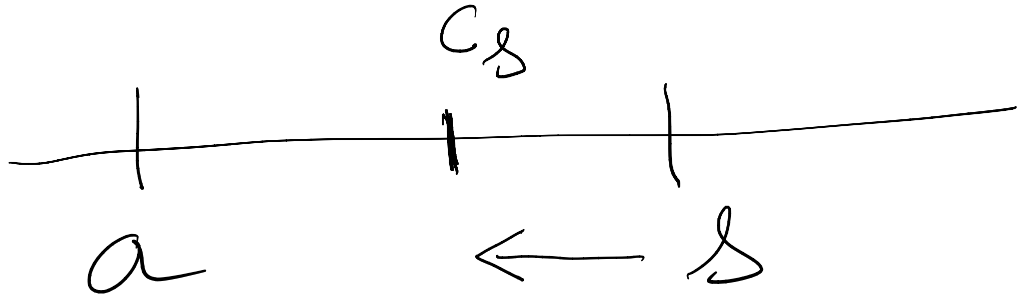
ist auch auf $]a,\delta[$ überall diff.

Mittelwertsatz $\Rightarrow$

$\exists\, c_\delta \in \,]a, \delta[$ mit

$$\begin{cases} h'(c_\delta) = 0 \\ h'(x) = \dfrac{f(\delta)}{g(\delta)}\, g'(x) - f'(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{f(\delta)}{g(\delta)} = \frac{f'(c_\delta)}{g'(c_\delta)}}$$



$$\lim_{\delta \to a} c_\delta = a$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \to a^+} \frac{f'(c_\delta)}{g'(c_\delta)} = A$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \to a^+} \frac{f(\delta)}{g(\delta)} = A$$

$\square$

V.2.5 Anwendungen

i) $f(x) = \sin x$

$g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

Was passiert mit dem Quotient $\frac{\sin x}{x}$ wenn x gegen 0 konvergiert?

$$\frac{\sin x \to 0}{x \to 0}$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$x' = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Bernouilli de L´Hospital

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

ii)

$$f(x) = 1 - \cos x$$
$$g(x) = x^2$$

$$f(0) = 0 \qquad g(0) = 0$$

Frage $\exists ? \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$f'(x) = \sin x$$
$$g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Bernouilli
de l'Hospital

V.2.6 Der Umkehrsatz

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ diff.

mit $f'(x) > 0$ auf $]a,b[$

Seien

$$-\infty \leq c = \inf\{f(x) ; x \in]a,b[\}$$

$< d = \sup\{ f(x) ; x \in]a,b[\}$

$\leq +\infty$

Dann ist $f :]a,b[\longrightarrow]c,d[$ bijektiv und die Umkehrfunktion

$f^{-1} :]c,d[\longrightarrow]a,b[$

ist überall auf $]c,d[$ diff.

und es gilt $\forall y \in]c,d[$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]a,b[\text{ gilt } \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Beweis vom Umkehrsatz

Korollar V.2.2 $\Longrightarrow$

f ist streng monoton wachsend

f' existiert auf $]a,b[$ überall

$\Rightarrow$ f ist an jeder Stelle auf $]a,b[$ stetig

Kapitel IV $\Rightarrow$ f ist von $]a,b[$ nach $]c,d[$ bijektiv und die

Umkehrfunktion $f^{-1}\ ]c,d[\to]a,b[$

ist auch stetig

(Satz IV.3.5)

Sei $y_0 \in]c,d[$ Sei $x_0 \in]a,b[$

mit $y_0 = f(x_0)$

Frage existiert es einen Grenzwert

für
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

wenn $y \to y_0$ konvergiert?

Sei $y_k \in]c,d[$ mit

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_0$$

Frage

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

?

$x_0 = f^{-1}(y_0)$

Seien x_k so dass

$$f(x_k) = y_k$$

f^{-1} ist an der Stelle y_0 stetig

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \underbrace{f^{-1}(y_k)}_{x_k} = \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}$$

d.h. $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

Hypothese $\Rightarrow$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = f'(x_0) > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\|$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{y_k - y_0}$$

das gilt für eine beliebige Auswahl von $y_k \longrightarrow y_0$

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \square$$

V.2.7 Beispiele

i) $\operatorname{Exp} x \quad \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$

$$\operatorname{Log} y = (\operatorname{Exp})^{-1}(y)$$

$$\operatorname{Log} : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$\operatorname{Exp}'(x) = \operatorname{Exp}(x) > 0$$

$\Longrightarrow$ Log ist überall differenzierbar

Umkehrsatz

$$\operatorname{Log}' y = \frac{1}{\operatorname{Exp}(\operatorname{Log} y)} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dy}\left[\operatorname{Log} y\right] = \frac{1}{y}$$

ii) $f \quad x \longmapsto x^k \quad k \in \mathbb{N}$

$\qquad \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$f'(x) = k x^{k-1}$
> 0

Kapitel $\underline{IV}$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$$

ist stetig $\quad [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$

Umkehrsatz $\Longrightarrow f^{-1}$ ist

auf $]0, \infty[$ differenzierbar

und es gilt

$$\frac{d}{dy}\left[\sqrt[k]{y}\right] = \frac{1}{k\left(f^{-1}(y)\right)^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k} \frac{1}{\left(\sqrt[k]{y}\right)^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{k} \frac{\sqrt[k]{y}}{\left(\sqrt[k]{y}\right)^{k}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$

V.3 die trigonometrische Funktionen

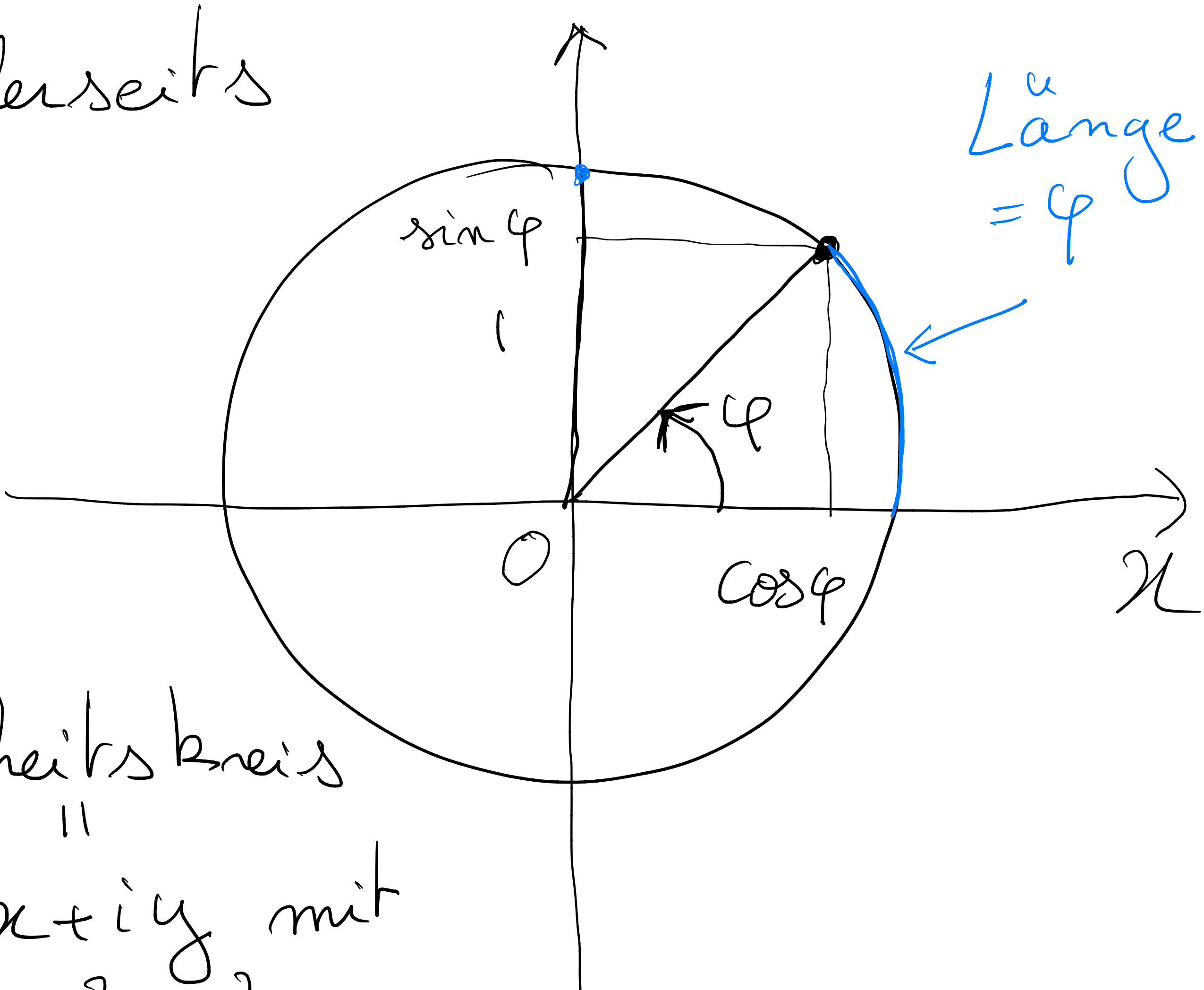
Einerseits

$$\cos\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\varphi^{2p}}{(2p)!}$$

$$\sin\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \operatorname{Exp}(i\varphi)$$

Andrerseits



Einheitskreis

$$\| $$

$$\{ z = x + iy \text{ mit } |z|^2 = 1 \}$$

V.3.1 Satz (Euler)

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \cos\varphi$$

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \sin\varphi$$

Beweis vom Satz V.3.1

Zuerst Ich behaupte

$$|\mathrm{Cos}\,\varphi + i\,\mathrm{Sin}\,\varphi| = 1$$

Beweis der Behauptung

$$\mathrm{Exp}(i\varphi) = \mathrm{Cos}\,\varphi + i\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$|\mathrm{Exp}(i\varphi)|^2 \qquad \left(|z|^2 = z\bar{z} \right)$$

$$= \mathrm{Exp}(i\varphi)\,\overline{\mathrm{Exp}\, i\varphi}$$

$$= \mathrm{Exp}(i\varphi)\,\mathrm{Exp}(-i\varphi)$$

$$\underset{\text{Additionstheorem}}{=} \mathrm{Exp}(i\varphi - i\varphi) = \mathrm{Exp}(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} + 1$$

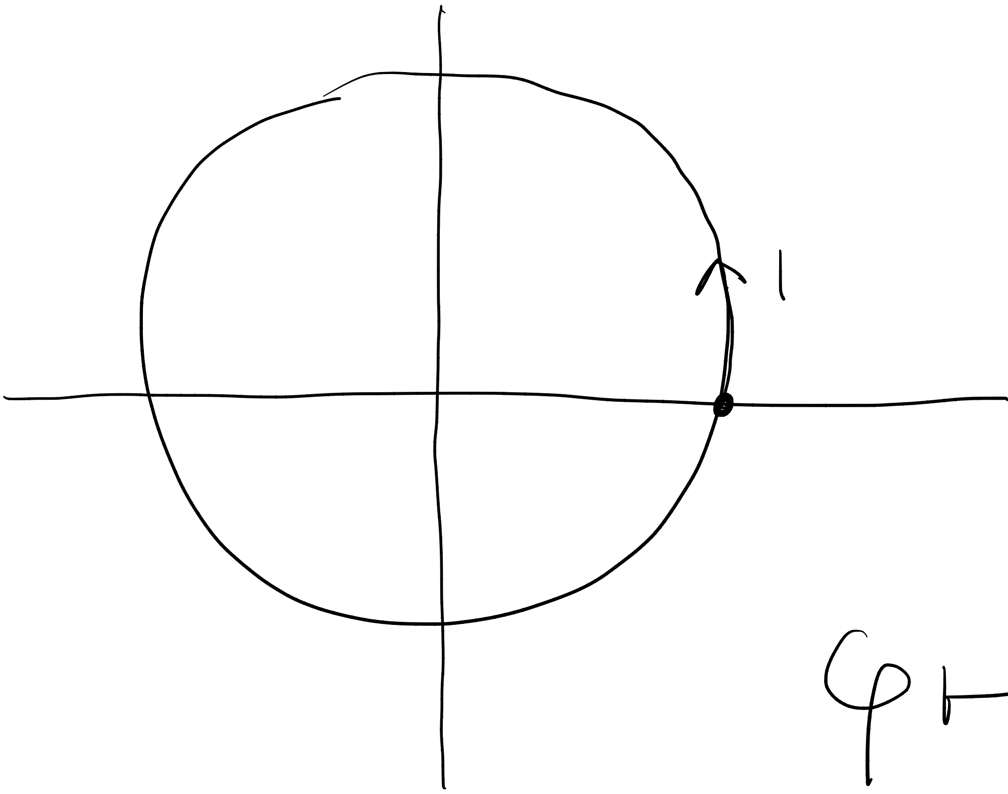
$$= 1$$

$$|\mathrm{Exp}(i\varphi)|^2 = 1 \implies \text{Behauptung}$$

$$\boxed{\left|\frac{d}{d\varphi}\operatorname{Exp}(i\varphi)\right|}$$

$$= \left| i \operatorname{Exp}(i\varphi) \right|$$

$$= |i| \, |\operatorname{Exp} i\varphi| = 1$$



$$\varphi \longmapsto \operatorname{Exp}(i\varphi)$$

Die Kurve $\varphi \longmapsto \mathrm{Exp}(i\varphi)$

durchläuft den Einheitskreis

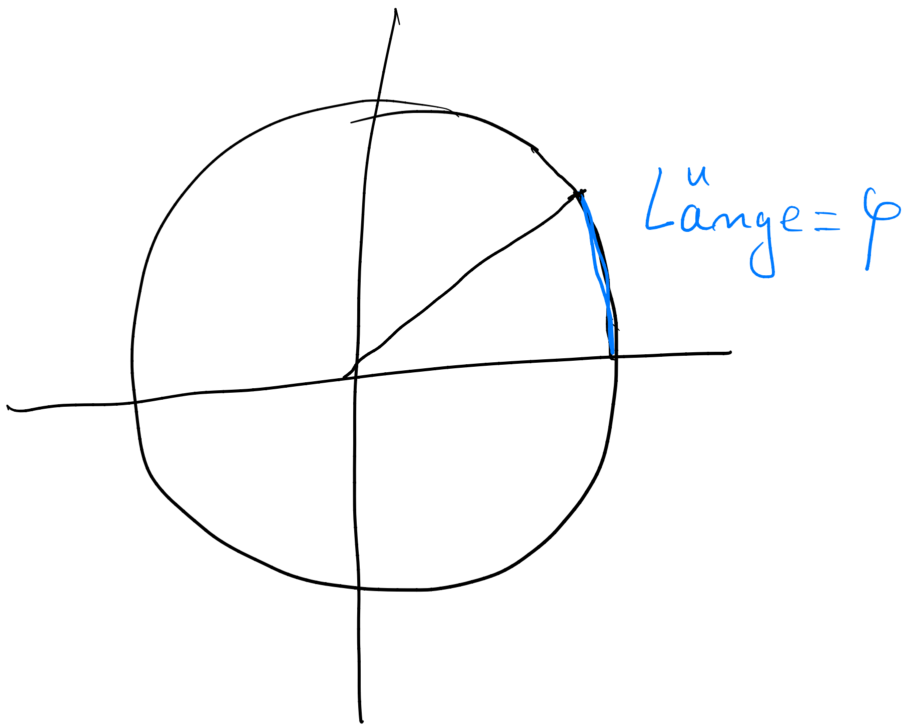
mit Geschwindigkeit 1

$\Rightarrow$ nach der Zeit φ

haben wir eine Länge

φ abgedeckt

$$\begin{array}{c}\mathrm{Exp}(i\varphi) \\ \| \\ \cos\varphi + i\sin\varphi\end{array}$$



$\square$