V DIFFERENTIALRECHNUNG AUF $\mathbb{R}$

V.1 Differential und Differentiationsregeln

V.1.1 Definition

V.1.2 Beispiele und Gegenbeispiel

V.1.3 Bemerkungen

i) f diff an der Stelle x_0
$\Longrightarrow$ f ist an der Stelle x_0 stetig

V.1.4 Eigenschaften des Differentials

V.1.5 Satz (Kettenregel)

V.1.6 Beispiel

V.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

V.2.1 Der Mittelwertsatz

V.2.2 Korollar $f\ ]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

i) $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv$ Konstante

ii) $f' \geq 0 \Rightarrow f$ Monoton wachsend

iii) $f' > 0 \Rightarrow f$ streng Monoton wachsend

V.2.3 Anwendung

Lösungsmenge von

$$\boxed{f' - \lambda f = 0} \Rightarrow f = c e^{\lambda x}$$
wobei $c \in \mathbb{R}$

V.2.4 Satz (Bernouilli de l'Hospital)

f, g auf $[a,b]$ stetig

f, g auf $]a,b[$ diffe.

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$f(a) = g(a) = 0$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

V.2.5 Anwendungen

V.2.6 Der Umkehrsatz

f auf $]a,b[$ diff.

wobei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$f'(x) > 0$ auf $]a,b[$

$c := \inf\{f(x) \; ; \; x \in]a,b[\}$

$d := \sup\{f(x) \; ; \; x \in]a,b[\}$

Dann ist $f:]a,b[\longrightarrow]c,d[$

bijektiv und

die Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]c, d[\longrightarrow]a, b[$$

ist differenzierbar mit

$$\boxed{\underline{\forall y \in]c,d[} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

<u>V</u>.2.7 Beispiele

i) $\quad \operatorname{Exp}^{-1}(y) := \operatorname{Log} y$

$$\operatorname{Log}' y = \frac{1}{y}$$

ii) $f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{N}$

$$f^{-1}(y) = y^{1/k} = \sqrt[k]{y}$$

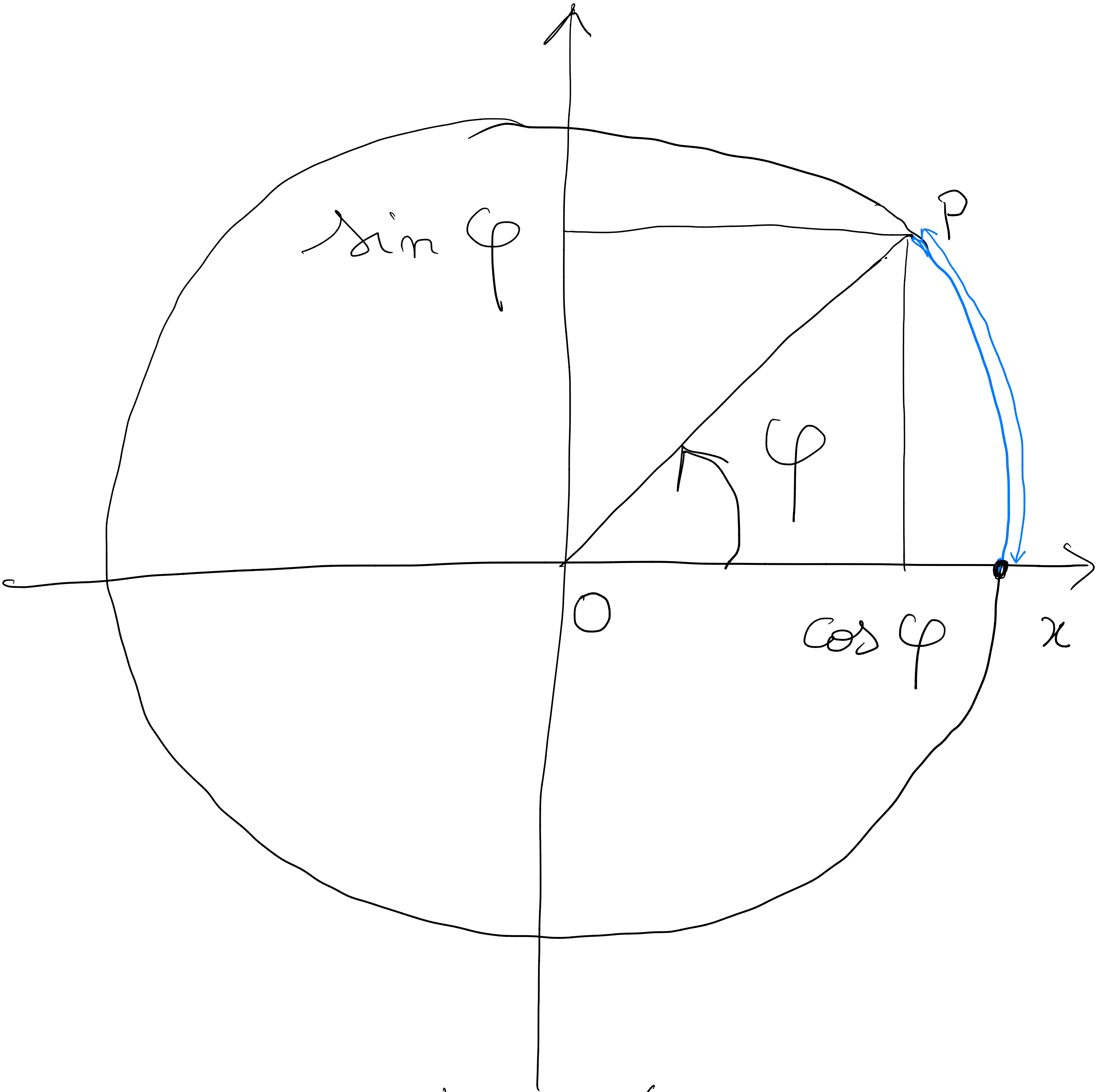
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{k}\, y^{\frac{1}{k}-1}$$

V.3 Die Trigonometrische Funktionen

$\operatorname{Exp}(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\cos\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\varphi^{2p}}{(2p)!} \leftarrow$$

$$\sin\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\varphi^{2p+1}}{(2p+1)!} \leftarrow$$



V.3.1 Satz (Euler)

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \mathrm{Cos}\,\varphi = \cos\varphi \\ \mathrm{Sin}\,\varphi = \sin\varphi \end{cases}$$

V.3.2 Korollar

$$\operatorname{Exp}(2i\pi) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$$

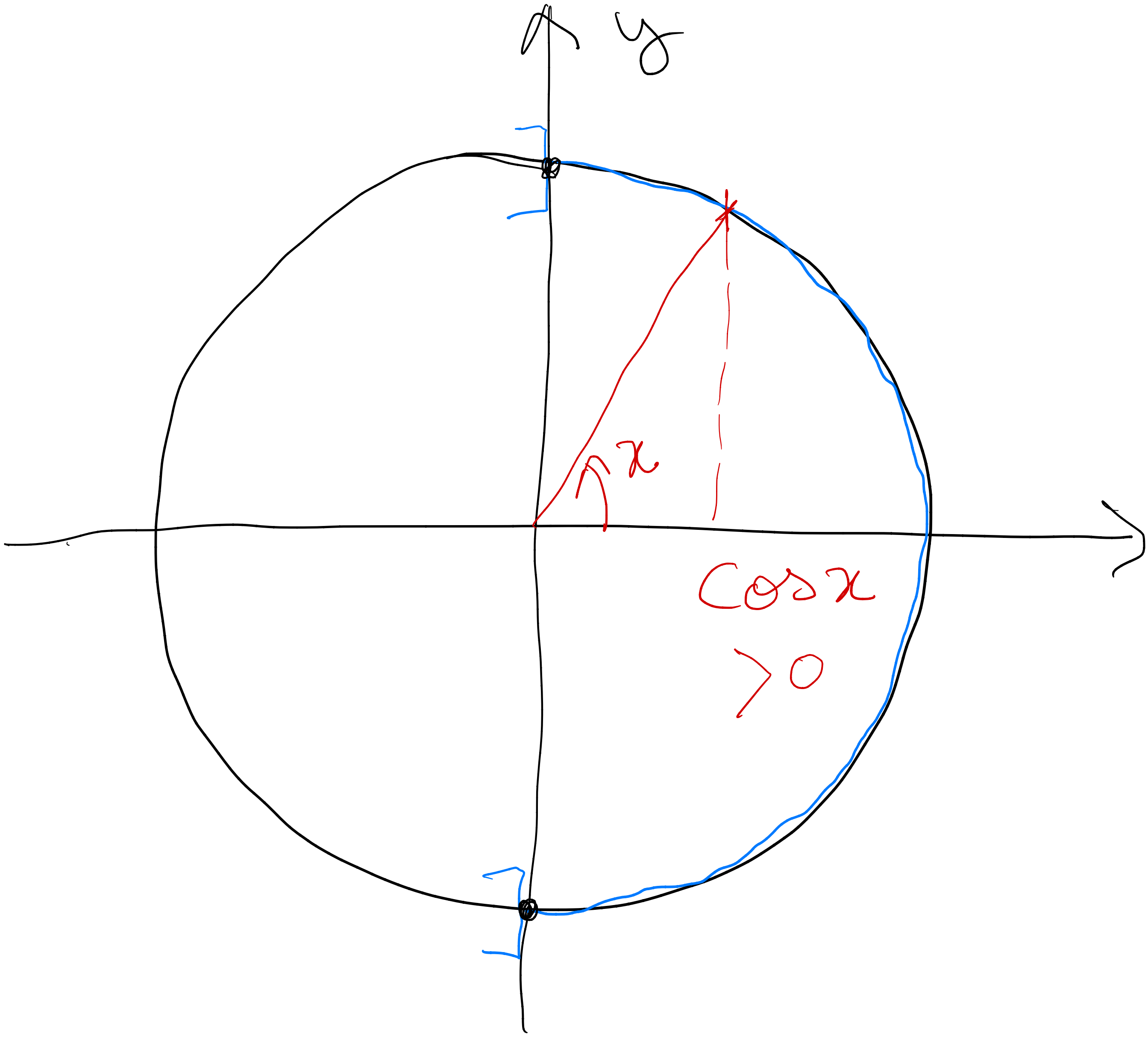
$$= 1 + i\,0$$

$$\boxed{\operatorname{Exp}(2i\pi) = 1}$$

V.3.3 Zyklometrische Funktionen

i) $\sin x = f(x)$

$$f'(x) = \cos x$$



$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\sin' x > 0$

Umkehrsatz $\Longrightarrow$

$$\sin\frac{\pi}{2} = +1$$

$$\sin -\frac{\pi}{2} = -1$$

$$c = \inf\left\{ \sin x \; ; \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$$

$$= -1$$

$$d = \sup\{ - \quad - \quad - \} = +1$$

$$\sin \quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \left]-1, 1\right[$$

ist streng monoton wachsend und bijektiv

$$\sin^{-1} y = \arcsin y$$

$$\arcsin : \left]-1,1\right[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin y}_{x})}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = +1$$

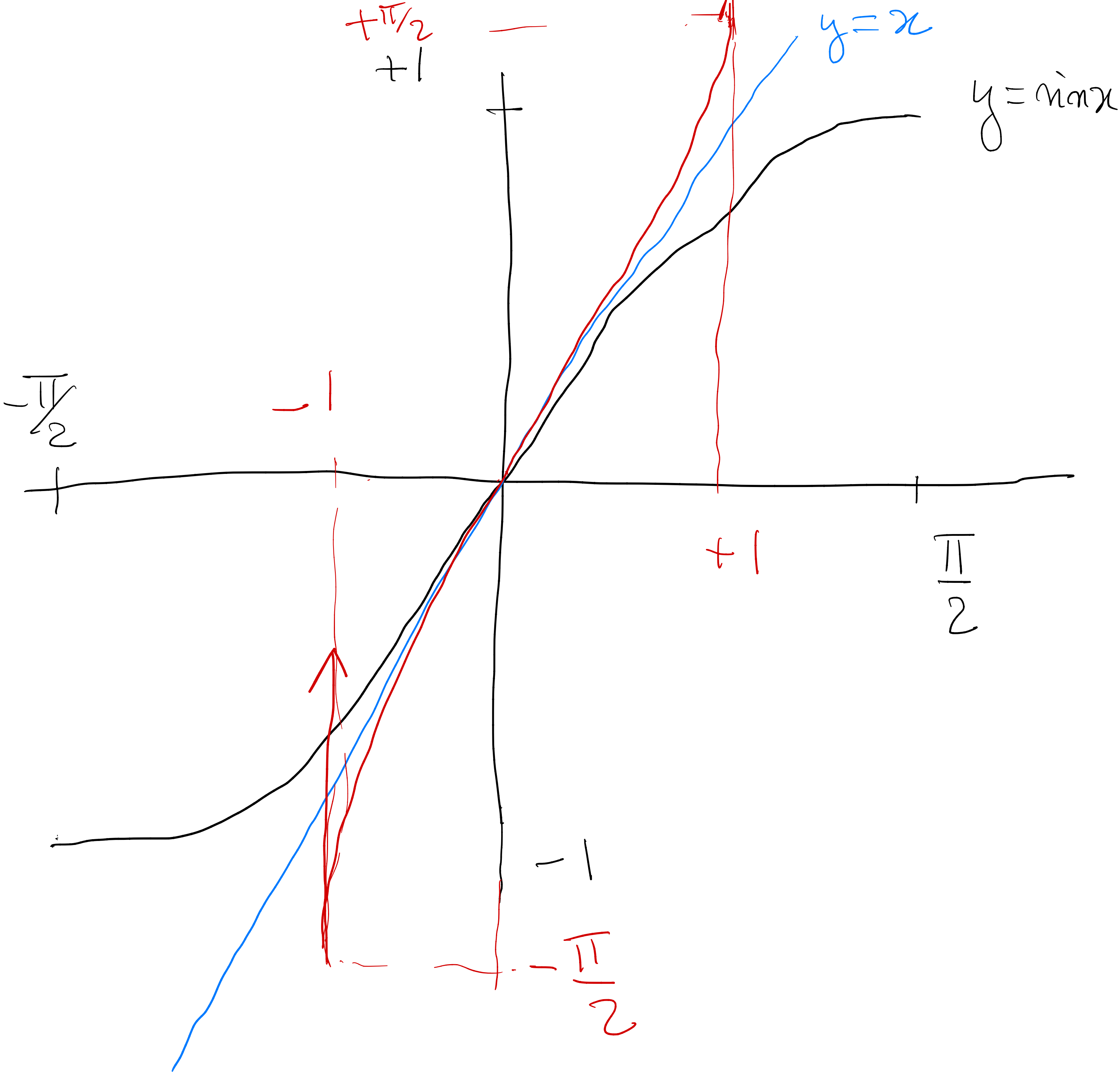
$$x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \cos x > 0$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\cos(\arcsin y) = (\cos) \circ (\arcsin)(y)$$

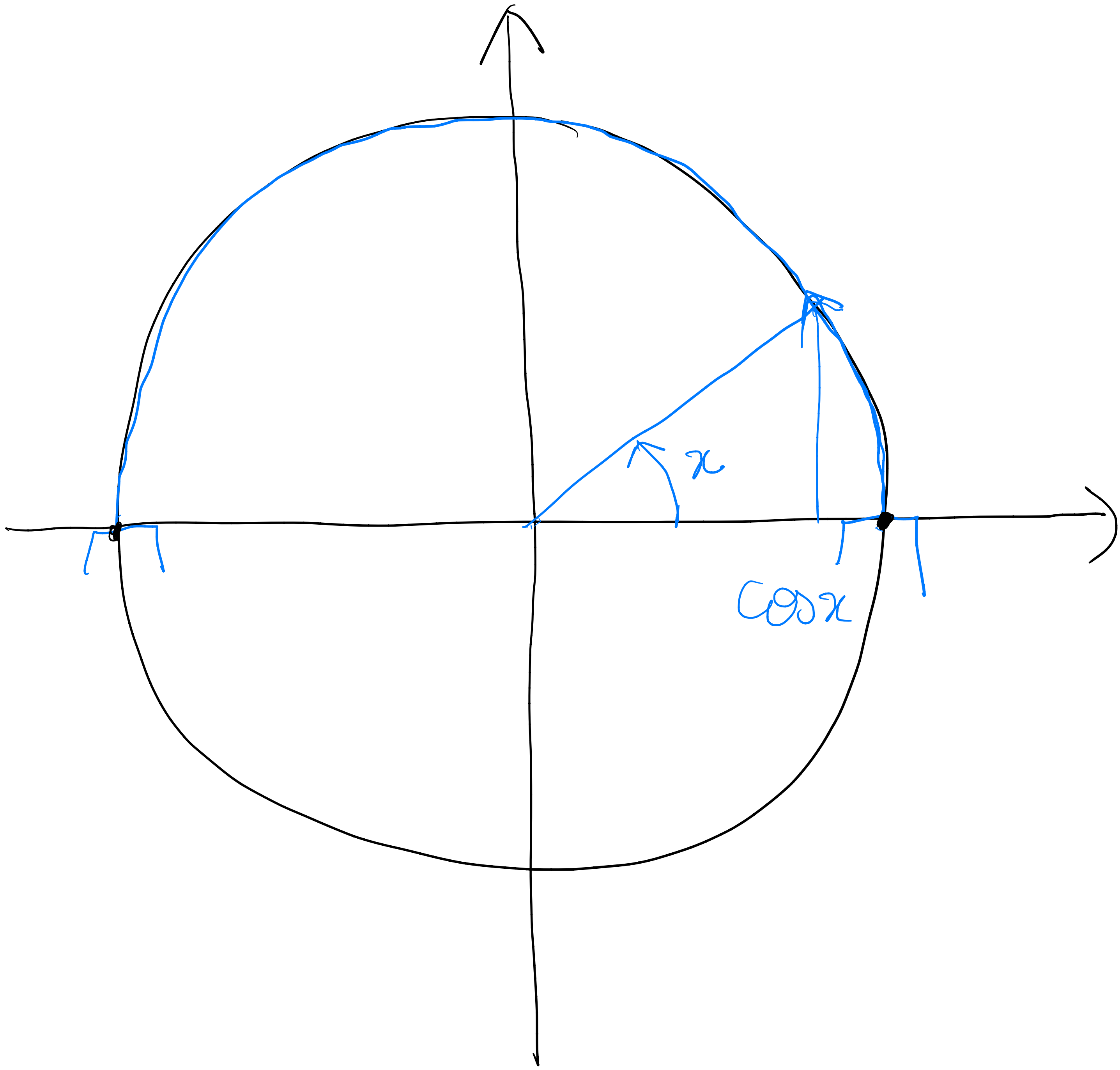
$$= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$



ii) $f(x) = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$



$$\forall x \in]0,\pi[\quad \sin x > 0$$

$$\Rightarrow \cos' x < 0$$

$$\cos \;]0, \pi[\longrightarrow]-1, 1[$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \pi = -1$$

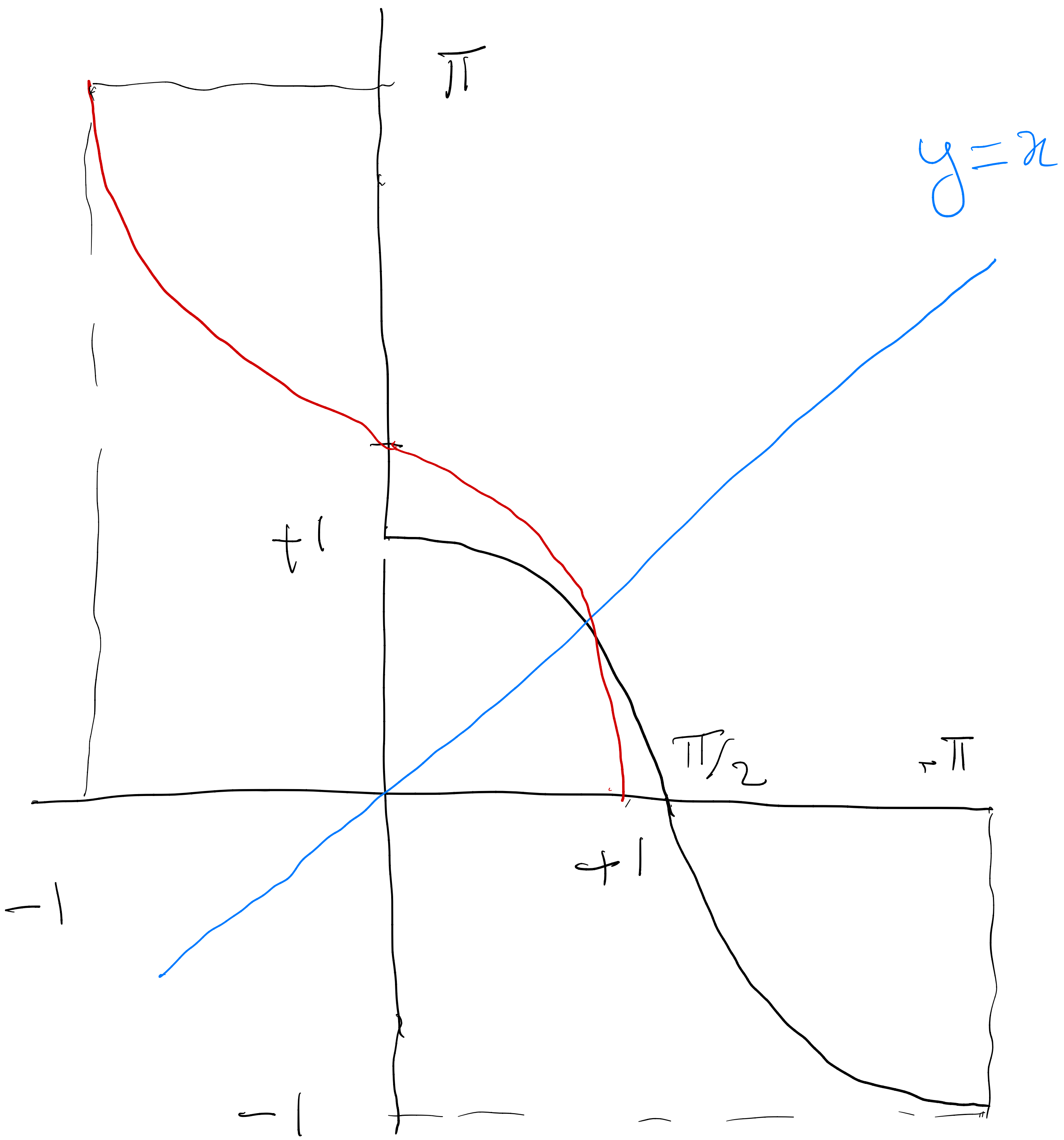
$$\arccos y = \cos^{-1} y$$

$$\frac{d}{dy}\left(\arccos y\right) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)}$$

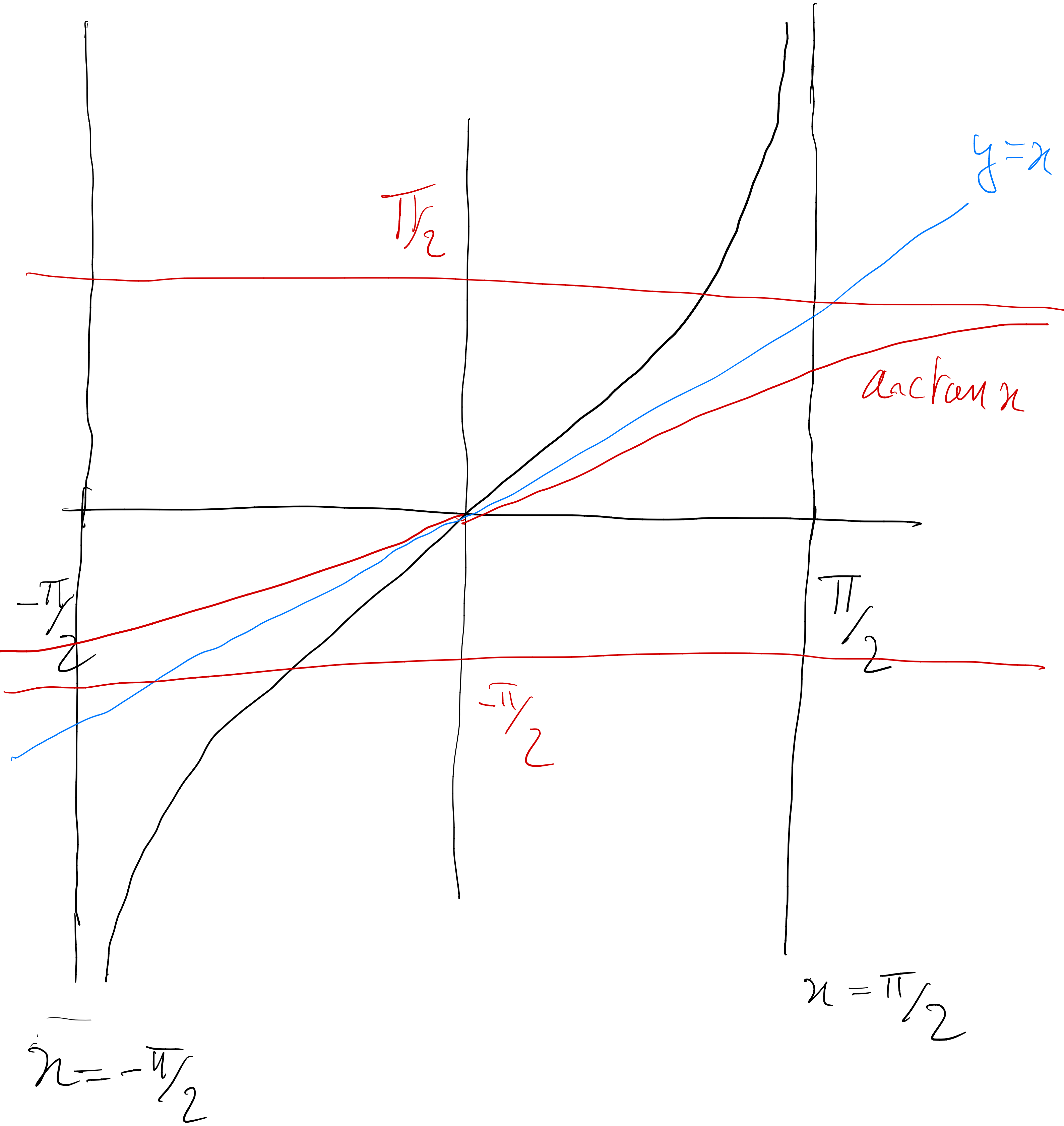
$$= -\frac{1}{\sin(\arccos y)}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dy}\arccos y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



iii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$



$$\frac{d}{dx}\left(\tan x\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

Umkehrsatz $\Rightarrow$

$\exists \tan^{-1} y \quad]-\infty, +\infty[$

$\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$\tan^{-1} y = \arctan y$

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)}$$

$$= \cos^2(\arctan y)$$

$$1+\tan^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)}$$

$$= \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}$$

$\sin x \qquad \sin(x)$

$x \sin x \qquad$ "$= \sin x \; x$"

$\sin x^2$?

$\sin(x)\; x$

Weitere Beispiele

Hyperbelfunktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{Exp}(x) + \mathrm{Exp}(-x)}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Anwendung vom Umkehrsatz.

V.4 Funktionen der Klasse C^1

V.4.1 Definition

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

wobei Ω ein offenes Intervall ist.

f heisst von der Klasse C^1

falls f auf Ω

überall differenzierbar

ist und

$$f' : \underset{\Omega}{\underset{\cap}{x}} \longmapsto f'(x)$$

ist stetig

Diese Menge von

Funktionen wird $C^1(\Omega)$

noviert.

V.4.2 Beispiele und Gegenbeispiel

$$\mathrm{Exp}'(x) = \mathrm{Exp}(x)$$

überall auf $\mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \mathrm{Exp} \in C^1(\mathbb{R})$$

$$\cos' x = -\sin x$$

auf $\mathbb{R}$

stetig

$$\left.\begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}\right. \in C^1(\mathbb{R})$$

ii) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf $(0, +\infty)$ und

auf $(-\infty, 0)$ ist f

überall differenzierbar

aussen 0 $x \longmapsto \frac{1}{x}$

ist differenzierbar

sin ist überall diff

Kettenregel $\Rightarrow$ $\sin\frac{1}{x}$ ist auf $(0,+\infty)$ und auf

$(-\infty,0)$ überall diff.

$\parallel$

$]-\infty,0[$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

$x^2\sin\frac{1}{x}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

überall differenzierbar

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) \sin\frac{1}{x} + x^2 \frac{d}{dx}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Ist f an der Stelle 0

differenzierbar ?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = ?$$

$f(0) = 0$ $\qquad$ $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= x \sin\frac{1}{x}$$

Frage hat $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$

einen Grenzwert an der

Stelle 0. Antwort: Ja

$x_k \to 0$

$$\left|x_k \sin\frac{1}{x_k}\right| \leq |x_k| \left|\sin\frac{1}{x_k}\right|$$

$$\leq |x_k| \to 0$$

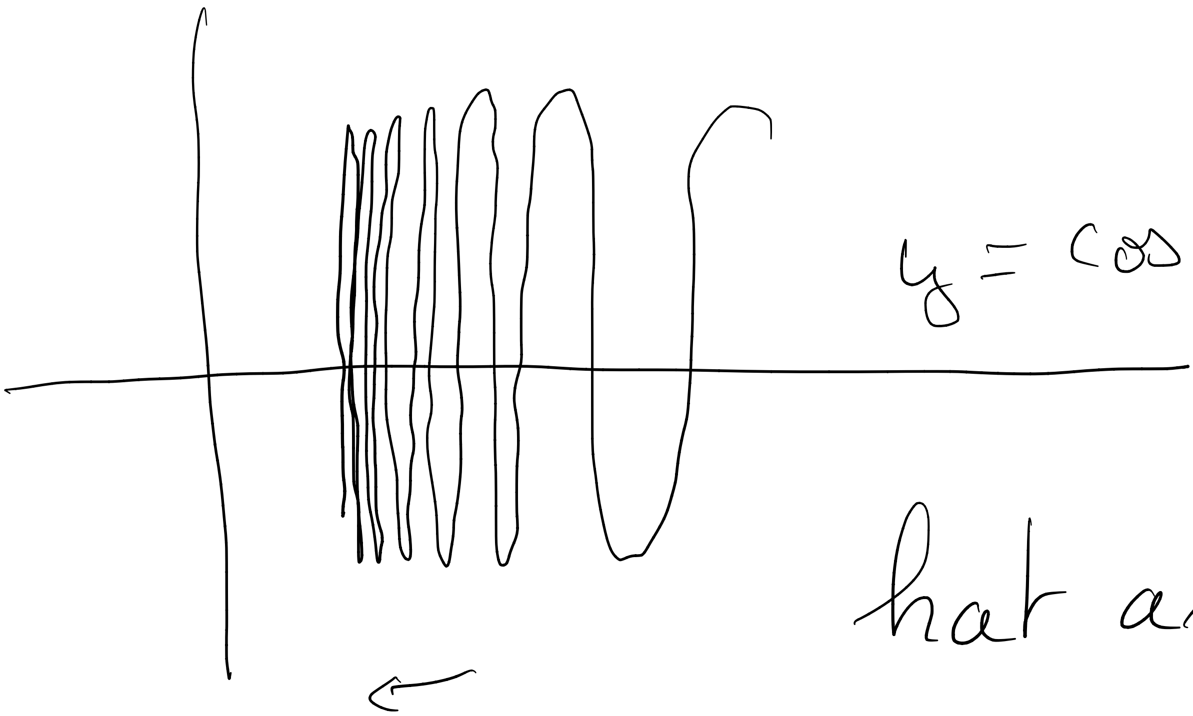
$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_k \sin\frac{1}{x_k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

f ist dann an der Stelle 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$

$$f'(x) = \underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow\, x\to 0 \\ 0}} - \cos\frac{1}{x}$$



hat an der

Stelle 0 <u>keinen</u>

Grenzwert

das heisst dass

f' existiert überall

aber $x \mapsto f'(x)$

ist an der Stelle 0

nicht stetig

$f \notin C^1(\mathbb{R})$

V.4.3 Satz

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen der Klasse C^1 auf Ω (offenes Intervall)

$\exists\, f, g\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

so dass

$f_k \longrightarrow f$ gleichmässig auf Ω

$f_k' \longrightarrow g$ gleichmässig auf Ω

Dann ist f von der Klasse C^1 auf Ω und es gilt

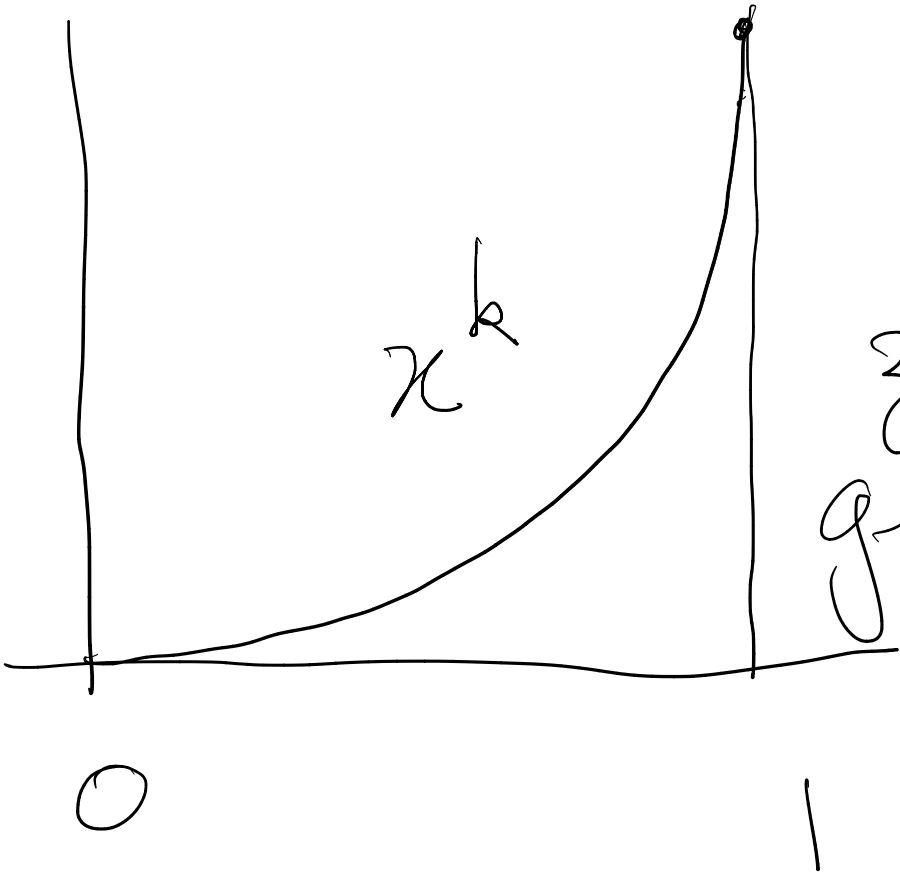
$$\boxed{f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega}$$

Wiederholung

$f_k \longrightarrow f$ glm auf Ω

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \| f_k(x) - f(x) \| = 0$$



Gegenbeispiel zu gleichmäßige Konvergenz

$(0,1) \quad x^k \longrightarrow 0$

Einfach

V.4.4 Gegenbeispiel

wenn f'_k nicht gleichmässig konvergiert

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{1}{k^2} + x^2}$$

$$\frac{1}{k^2} \to 0$$

$$\frac{1}{k^2} \longrightarrow 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) \longrightarrow f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

Diese Konvergenz ist gleichmässig

$$\left| f_n(x) - |x| \right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{k^2} + x^2} - \sqrt{x^2}$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right)$$

$$\left| f_n(x) - |x| \right| = \frac{\left| \frac{1}{k^2} + x^2 - x^2 \right|}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + x^2} + \sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+x^2}+\sqrt{x^2}}$$

$$< \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{k} \to 0$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_k(x) - |x| \right| \leq \frac{1}{k} \to 0$$

Die Konvergenz ist gleichmässig

$$f_k(x) = \sqrt{\frac{1}{k^2} + x^2} \longleftarrow$$

$$f_k'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{\frac{1}{k^2}+x^2}}$$

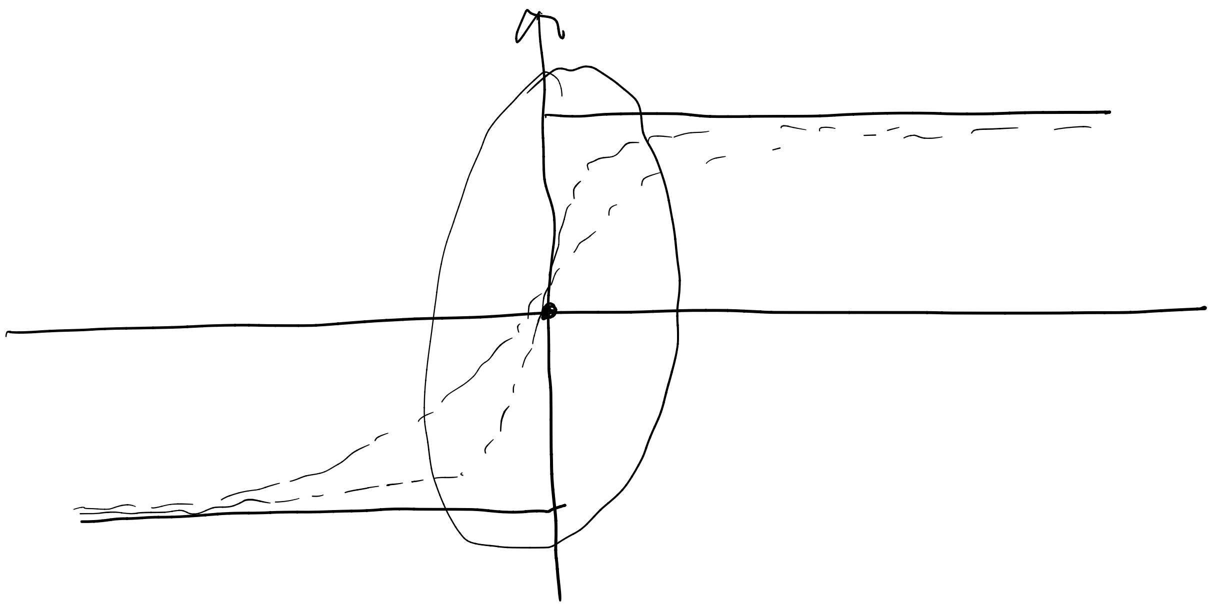
$$\boxed{\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+x^2}}$$

$$f_k'(0) = 0$$

$x \neq 0 \qquad \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+x^2}} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$

$$g(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



g(x) ist nicht stetig

Kap IV Falls die Konvergenz

$f_k'(x) \longrightarrow g(x)$

gleichmässig wäre

dann da $f'_k \in C^0(\mathbb{R})$

hätten wir $g \in C^0(\mathbb{R})$

$$f(x) = |x| \quad \forall x \neq 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\shortparallel$$

$$g(x)$$

das gilt an der Stelle 0 nicht. Die Funktion f ist an dieser Stelle nicht differenzierbar. $f \notin C^1(\mathbb{R})$

V.4.5 Anwendung zu Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$0 < \rho = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$$

$\forall x$ mit $|x| < \rho$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Kap IV $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Sei $0 < r < \rho$

auf $]-r, r[= \Omega$

konvergiert die Folge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gegen f gleichmässig

($\Longrightarrow$ f ist auf $\Omega =]-r, r[$ überall stetig

f ist auf $]-\rho, \rho[$ überall stetig)

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$= a_1 + x^{-1} \sum_{k=2}^{n} k a_k x^k$$

Frage: konvergiert

$$\sum_{k=2}^{n} k a_k x^k \; ?$$

Wiederholung: $\sqrt[k]{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{1} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\rho}$$

$\Longrightarrow$ beide

$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und

$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

haben den <u>selben</u>

<u>Konvergenzradius</u>

$\Longrightarrow \quad \forall 0 < r < \rho$ auf $]-r, r[$

$f_n'(x) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

gleichmässig

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ f_n' \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \end{cases}$$

auf $]-1,1[$ glm

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$$

$$\in C^1(]-1,1[)$$

und

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

V.5 Funktionen der Klasse C^m $\left(\begin{matrix} m \in \mathbb{N} \\ m = \infty \end{matrix}\right)$

V.5.1 Definition

Ω offenes Intervall $f\ \Omega \to \mathbb{R}^n$

i) f heisst auf Ω m-Mal differenzierbar falls f auf Ω $(m-1)$-Mal differenzierbar ist und die $(m-1)$ Ableitung von f ist auch differenzierbar

$$\left(f^{(m-1)}(x)\right)' = f^{(m)}(x)$$

$$= \frac{d^m f}{dx^m}(x)$$

($m = 2$ $\qquad f$ 2-Mal differenzierbar

$\Longleftrightarrow f'(x)$ 1-Mal differenzierbar

$$f^{(2)}(x) = f''(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx} f\right]$$)

ii) f ist von der Klasse

C^m falls f m-Mal

differenzierbar ist und

$f^{(m)}$ ist auf Ω

stetig

iii) Falls $f \in C^m(\Omega)$

für alle $m \in \mathbb{N}$ man

schreibt dass

$$f \in C^\infty(\Omega)$$

(Man spricht über "glatte"

Funktion"

V.5.2 Beispiele

i)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \longrightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$\longrightarrow f''(x)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

$$\longrightarrow f'''(x)=f^{(3)}(x)$$

$$=\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3}$$

.....

$$f\in C^\infty(\mathbb{R})$$

ii) Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradiusses $\forall x \in]-\rho, \rho[$ von der Klasse C^m $(\forall m \in \mathbb{N})$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\in C^{\infty}(]-\rho, \rho[)$$

$$0 < \rho = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty$$

V.6 Taylor Formel

Warum brauchen wir so viele Ableitungen?

Antwort: das ist insbesondere nützlich um allgemeine C^m Funktionen durch einfache Funktionen (Polynome) zu approximieren.

V.6.1 Satz (Taylor Entwicklung)

Sei $f \in C^m(\Omega)$ wobei

Ω ein offenes Intervall ist.

$f^{(m)}$ ist auf Ω differenzierbar

$\forall\ a, b \in \Omega$ mit $a < b$

$\exists\ c \in]a, b[$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots$$

$$\dots + f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \dots + f^{(m)}(a) \frac{(b-a)^m}{m!} +$$

$$+ \quad f^{(m+1)}(c) \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Man spricht dort über die Taylor Entwicklung der m-ten

Ordnung an der Stelle a

$$T_m f(a)(x) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

$\left(f^{(0)} = f \right)$ heisst das Taylor Polynom von f m-ter Ordnung an der Stelle a

$$f(x) - T_m f(a)(x)$$

$$= R_m f(a)(x)$$

ist der Restterm

$$\left(f(b) - T_n f(a)(b) = f^{(n+1)}(c) \, \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

$c \in]a,b[$

V.6.2 Bemerkung

$$|f(b) - T_n f(a)(b)| \leq \underbrace{|f^{(n+1)}(c)|}_{\leq M} \, \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$(x-a)^{m+1}$ ist viel kleiner

als $(x-a)^k$ $\forall$ <u>$k \leq m$</u>

in der nähe von a

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^{m+1}}{(x-a)^k} = \lim_{x \to a} (x-a)^{m+1-k} = 0$$

$$k \leq m \Rightarrow m+1-k > 0$$

"Je grösser m ist desto

besser wird f(x) durch

$T_m f(a)(x)$ in der nähe von

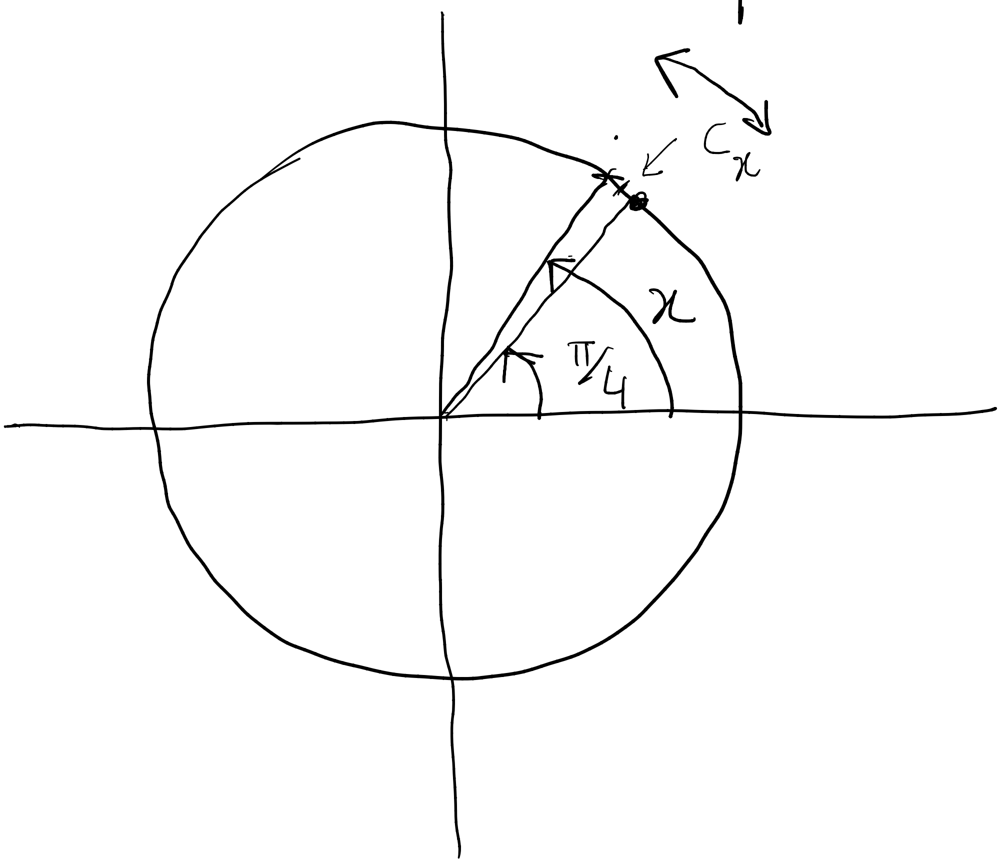
a approximiert"

V 6.3 Beispiel

$$f(x) = \sin x$$

$$a = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Taylor Entwicklung $\Rightarrow$

$$\sin(x) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin'\frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$(x = b)$

$$+ \sin''\frac{\pi}{4}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \sin^{(3)} c_x \,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin'\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin''\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \sin x - T_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x) \right|$$

$$= \left| \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}\,2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 \right|$$

$$= \underbrace{\left| \sin c_x \right|}_{\leq 1} \left| \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} \right|$$

Für $\left| x - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \qquad \left| x - \frac{\pi}{4} \right|^3 \leq \frac{1}{1000}$$

$$\left| \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\pi/4\right)^2}{2}\right)\right|$$

$$< \frac{\left|x-\frac{\pi}{4}\right|^3}{6} < \frac{1}{6000}$$

TE Ordnung 3

$$f(x) = \sin x = \sin\frac{\pi}{4} + \sin'\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+ \sin''\frac{\pi}{4}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + \sin^{(3)}\frac{\pi}{4}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}$$

$$+ \sin^{(4)} c_x \,\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}$$

$$\| $$

$$\left[T_3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right](x)$$

$$\left| f(x) - T_3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(x) \right|$$

$$= \underbrace{\left| \sin^{(4)} c_x \right|}_{\leq 1} \frac{\left| x - \frac{\pi}{4} \right|^4}{4!}$$

$$\left| x - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \left| x - \frac{\pi}{4} \right|^4 \leq \frac{1}{10000}$$

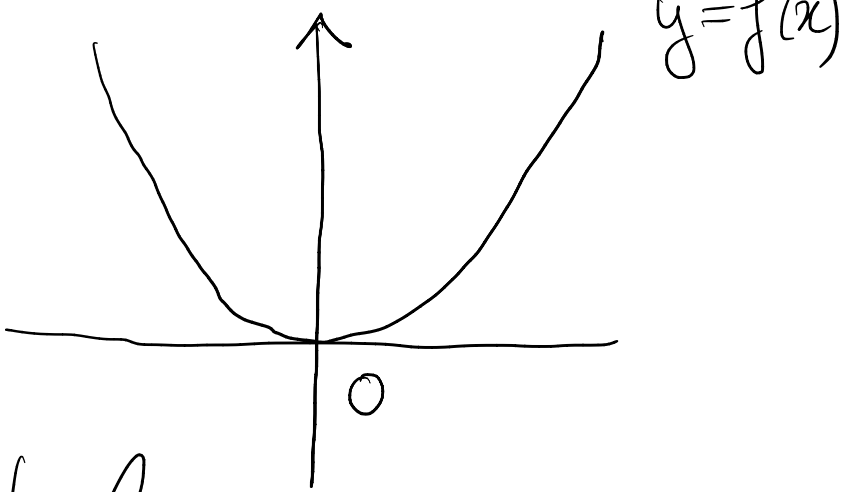
$$4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\left| x - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\left| f(x) - \left(T_3 \sin\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)(x) \right| \leq \frac{1}{240000}$$

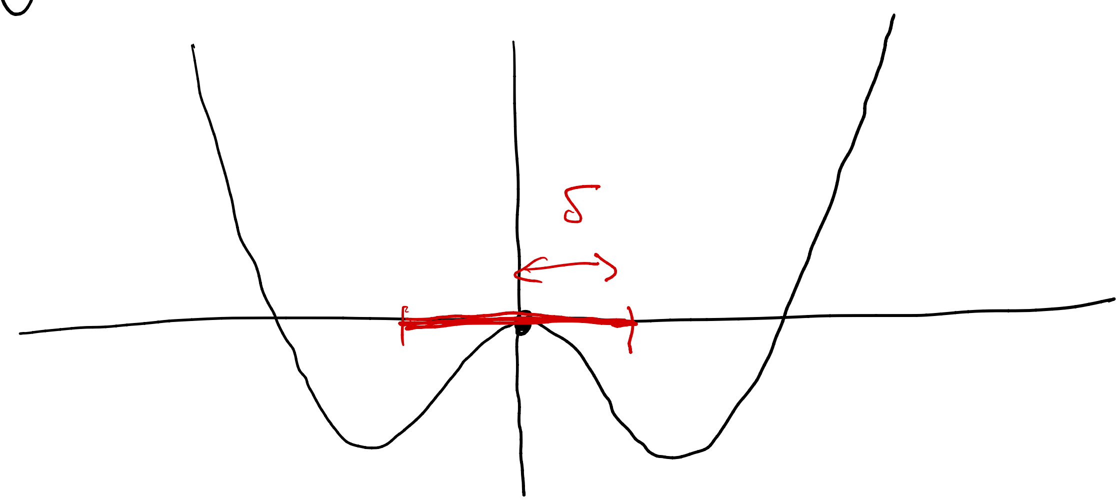
V.7 Lokale Extrema

$f(x) = x^2$



0 ist ein global Minimum von f

$$f(x) = (x^2-1)\,x^2$$



0 ist ein lokal Maximum

V.7.1 Definition Ω offenes Intervall

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

i) $x_0 \in \Omega$ heisst global Minimum (bzw Maximum) von f falls $\forall x \in \Omega$

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \left(\text{bzw } f(x_0) \geq f(x)\right)$$

ii) $x_0 \in \Omega$ heisst lokal Minimum (bzw Maximum) von f falls $\exists \delta > 0$

mit $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset \Omega$

$\forall x \in \Omega \; |x - x_0| \leq \delta$

$\Rightarrow \quad f(x_0) \leq f(x)$

$\left(\text{bzw} \quad f(x_0) \geq f(x) \right)$

$\square$