Serie 2

Aufgaben 2, 3 und 6 sind Professor Einsiedlers Analysisskript entnommen. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bezeichnen auf diesem Übungsblatt alle ganzen Zahlen grössergleich 1.

1. **Logik.** Formulieren Sie die Aussage "es gibt keine grösste natürliche Zahl" und die Aussage "für jede natürliche Zahl n gibt es eine strikt grössere natürliche Zahl" in Prädikatenlogik. Zeigen Sie durch Umformung in Prädikatenlogik die Äquivalenz beider Aussagen.

2. **Archimedisches Prinzip.** Was ist die Menge

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \right\}$$

wobei n über alle natürlichen Zahlen läuft?

3. **Kartesisches Produkt.** Seien X, Y Mengen und A, A' Teilmengen von X. Des Weiteren seien B, B' Teilmengen von Y. Zeigen Sie die Formel

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Überzeugen Sie sich (z.B. durch ein Bild) auch davon, dass es keine ähnliche Formel für die Vereinigung gibt.

4. **Abbildungen und Mengen.** Sei

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{array}$$

für ein $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und für $b \in \mathbb{R}$. Zeichne die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant f(x)\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

   (a) für $a = 2$, $b = 1$;
   (b) für $a = -2$, $b = 1$.

5. **Inverse.**

   (a) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nehme an es existieren Abbildungen $g_1 : Y \to X$ and $g_2 : Y \to X$ mit

$$g_1 \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{and} \quad f \circ g_2 = \mathrm{id}_Y .$$

   Zeige dann, dass $g_1 = g_2 = f^{-1}$ gilt, und dass f bijektiv ist.

(b) Nennen Sie ein Beispiel für eine Funktion, die eine Rechtsinverse hat, aber nicht bijektiv ist. Mit der rechten Inverse ist gemeint, dass, wenn f eine Funktion von X nach Y ist, eine Funktion g von Y nach X existiert, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

6. **Abbildungen und Operationen auf Mengen.** Gegeben sei eine Funktion $f : X \to Y$ und Teilmengen $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

   (b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

   (c) Beweisen Sie die Gleichungen

   $$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \qquad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').$$

   (d) Zeigen Sie, dass $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ und dass Gleichheit gilt, wenn f injektiv ist. Verifizieren Sie, dass in diesem Fall auch $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$ gilt.

   (e) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ und $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ gelten.

Zusammenfassend sollten Sie sich merken, dass die Urbildoperation mit allen von uns besprochenen mengentheoretischen Operationen (unter anderem Vereinigung, Durchschnitt und Komplement) verträglich ist, während dies die Bildoperation nur für die Vereinigung oder unter gewissen Bedingungen erfüllt.