D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 3

1. **Lineare Gleichungen.** Benutze das Gaußsche Eliminationsverfahren, um alle Lösungen des folgenden System linearer Gleichungen über $\mathbb{R}$ zu finden:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + w &= -1 \\ 3x + 6y + 2z + 5w &= 1 \end{cases}$$

2. **Körper.** Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Seine Elemente sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, wobei jeweils $\overline{n}$ die Restklasse von n modulo $5\mathbb{Z}$ bedeutet. Berechne:
   (a) alle Lösungen (x, y) der Gleichung $x + y = \overline{0}$;
   (b) den Wert von $\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}}$ als ein Element von $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$;
   (c) den Wert von $\overline{4}^{2022}$.

3. **Körper.** Beweise für beliebige $a, b \in \mathbb{F}_3$ die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3.$$

4. **Lineare Gleichungen.** Fixiere $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Bestimme, wann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

mindestens eine Lösung hat. Beschreibe in diesem Fall seine Lösungsmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

5. **Körper.** Sei $(k, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper und sei $\alpha \in K$, sodass die Gleichung $x^2 = \alpha$ in k keinen Lösungen hat. Sei τ das formale Symbol ausserhalb von k, sodass $\tau^2 = \alpha \in k$. Zeige, dass die Menge

$$k[\tau] = \{a + b\tau \mid a, b \in k\}$$

mit den Operationen

$$\begin{array}{rccc} + : & k[\tau] \times k[\tau] & \to & k[\tau] \\ & (a + b\tau, c + d\tau) & \mapsto & a + c + (b + d)\tau \\ \\ \cdot : & k[\tau] \times k[\tau] & \to & k[\tau] \\ & (a + b\tau, c + d\tau) & \mapsto & ac + \alpha bd + (bc + ad)\tau \end{array}$$

als Addition und Multiplikation, und mit $0 + 0\tau$ als additiv neutrales Element 0 und $1 + 0\tau$ als multiplikativ neutrales Element 1 ein Körper ist.

Gebe auch explizite Beispiele für diese Konstruktion an.

6. **Körper.** Sei k ein endlicher Körper.

(a) Sei S die Summe aller Elemente von k. Zeige, dass $S = 0$ ist genau dann, wenn k mehr als 2 Elemente besitzt.
Hinweis: Welches sind die Eigenschaften der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} m_b : & k & \to & k \\ & x & \mapsto & b \cdot x \end{array}$$

für $b \in k^* = k \setminus \{0\}$?

(b) Sei $M = \prod_{x \in k^*} x$ das Produkt aller von Null verschiedenen Elemente von k. Zeige, dass $M = -1$.
Tipp: Betrachte die Abbildung $k^* \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in k^*$.