Aufgabe 3 stammt aus dem Skript von Dr. Menny Akka Ginosar zu Fibonnacci-Folgen. Dieses Skript finden Sie auf der Kurswebsite.

1. Der Goldene Schnitt Teil 1. In der Vorlesung haben wir $\mathcal{F}_{0,1}$ berechnet, schauen Sie sich diese Berechnung nochmals an. Dann:

(a) Geben Sie eine Formel für $\mathcal{F}_{1,0}$ an.

(b) Bestimmen Sie eine Formel für $\mathcal{F}_{a,b}$, welche nur von a, b und n abhängt.

2. Negation und De Morgan.

(a) Seien A und B Aussagen. Beweisen Sie

(i) A ist äquivalent zu $\neg(\neg A)$;

(ii) $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $\neg A \wedge \neg B$;

(iii) $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $\neg A \vee \neg B$.

(b) Jetzt seinen A und B Mengen in einer größeren Menge U. Beweisen Sie

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3. Der Goldene Schnitt, Teil 2. Wir wollen normalerweise abgesehen von der Fertigkeit algebraische Manipulationen richtig durchzuführen nicht auf Ihr Schulwissen zurückgreifen. Wir machen in dieser Aufgabe zu dem Vorschau eine Ausnahme.

Sei $\mathcal{F}_{0,1} = (F_0, F_1, F_2, \dots) \in \mathbf{Fib}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass dieser Grenzwert existiert und ungleich 0 ist.

4. Logik. Seien x, y, z Variablen und R, S Relationen. Vereinfachen Sie die folgende Aussage, indem Sie die Negationsklammer auflösen:

$$\neg\Big(\forall x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(z,x)) \vee (R(x,y) \wedge S(z,x))\Big)$$

5. Logik. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Bilden Sie die Kontraposition der folgenden Aussage:

$$x \neq y \implies (\exists \epsilon > 0 : |x - y| > \epsilon)$$

6. Dimension. Seien $\mathcal{F} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ und $\mathcal{G} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$ zwei Fibonacci-Folgen. Die Folgen sind Ihnen nicht bekannt, aber für jede natürliche Zahl i können Sie überprüfen, ob $\alpha_i = \beta_i$ ist. Dies können Sie so oft tun wie Sie wollen.

Behauptung: Zwei **zufällige** Überprüfungen reichen aus um zu überprüfen, ob $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ ist. Erklären Sie warum.