Serie 4

1. Sei $m \in \mathbb{R}$. Beschreibe die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von m:
$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$
Wann ist die Lösungsmenge S ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$? Gebe eine geometrische Interpretation für S in Abhängigkeit von m an.

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegeben Vektorräume? Was passiert, wenn in (b) und (c) der Körper $\mathbb{R}$ durch den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird?
   (a) $S_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
   (b) $S_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   (c) $S_3 := \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

3. Sei K ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt und betrachte die Menge
$$V = K^K = \mathrm{Abb}(K, K) := \{f : K \to K\}.$$
Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies mit punktweiser Addition, d.h. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in K$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in K$ ein Vektorraum ist.
Sei jetzt
$$V_{even} := \{f : K \to K \mid f(-x) = f(x)\, \forall x \in K\},$$
$$V_{odd} := \{f : K \to K \mid f(-x) = -f(x)\, \forall x \in K\}.$$
Zeige, dass V_{even} und V_{odd} Untervektorräume von V sind. Beweise ausserdem, dass
$$V_{even} + V_{odd} := \{v + w \mid v \in V_{even},\ w \in V_{odd}\} = V$$
und $V_{even} \cap V_{odd} = \{0\}$.

4. Seien ∞ und $-\infty$ zwei verschiedene Objekte, beide nicht in $\mathbb{R}$ enthalten. Wir definieren Addition und Multiplikation auf $V := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ wie folgt: in $\mathbb{R}$ nutzen wir die herkömliche Addition und Multiplikation. Für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & \text{falls } t < 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0, \\ \infty & \text{falls } t > 0, \end{cases} \qquad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t < 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0, \\ -\infty & \text{falls } t > 0, \end{cases}$$

$$t + \infty = \infty + t = \infty, \qquad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty.$$

Zuletzt sei

$$\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty), \quad \infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = 0.$$

Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

5. Sei X eine Menge und P die Menge aller Teilmengen von X. Für alle $A, B \in P$ und $\lambda \in \mathbb{F}_2$ definiere

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$\lambda \cdot A := \begin{cases} \varnothing & \text{für } \lambda = 0, \\ A & \text{für } \lambda = 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $(P, \triangle, \cdot, \varnothing)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

6. Sei V ein K-Vektorraum und seien V_1, V_2, V_3 Untervektorräume, von denen keiner in einem anderen enthalten ist. Entscheide, mit Beweis, ob die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ immer, oder manchmal, oder nie ein Untervektorraum ist.

Tipp: Variiere den Körper K, um Beispiele zu erhalten.

Multiple Choice questions. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der gegebenen Vektorräume

- ○ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, 2x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
  Aus der Vorlesung wissen wir, dass Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme Untervektorräume sind.

- ○ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
  Diese Menge enthält $(0, 0, 0)$ nicht und ist damit kein Untervektorraum.

- ○ $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
  Dies ist kein Untervektorraum, da die Multiplikation mit einem negativen Skalar λ die Ungleichheit umkehrt. Also ist für ein Element (x_1, x_2) aus der Menge $\lambda(x_1, x_2)$ nicht mehr in der Menge enthalten.

- $\{(0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
  Dies ist ein Untervektorraum, da für beliebige $v = (0, x, 2x, 3x)$, $w = (0, y, 2y, 3y)$ aus der Menge und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$v + \lambda w = (0, x + \lambda y, 2x + 2\lambda y, 3x + 3\lambda y) = (0, z, 2z, 3z),$$

  wobei $z = x + \lambda y$ ist. Also ist $v + \lambda w$ in der Menge enthalten.

- $\{(x^4, x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
  Dies ist kein linearer Unterraum. Bemerke, dass $v := (1, 1, 1, 1)$ in der Menge enthalten ist, nicht aber $2v$, da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $2 = x^4 = x^3 = x^2 = x$.

Frage 2. Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen. Die Addition auf $\mathbb{R}^2_+$ sie folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Deifnitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
- $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}$
- $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}$

Dann ist $\mathbb{R}^2_+$ ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar gemäss der

- Erste Definition
  Nein. Wenn $\lambda < 0$ ist, dann gilt $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2_+$

- Zweite Definition
  Nein, die Distributivität $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ ist verletzt.

- Dritte Definition
  Dies erfüllt alle Axiome.