D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler

Prof. P. Biran

Serie 5

1. **Polynome.** Gegeben sind die vier Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + x^2 \\ p_2(x) &= x^2 - 2x - 4 \\ p_3(x) &= 3x + 4 \\ p_4(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

   (a) Schreiben Sie das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linerakombination der Polynome p_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

   (b) Berechnen Sie das Erzeugnis $\mathrm{Sp}(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

2. **Dimension 2.** Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, sodass $w \neq \alpha v$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

   (a) Zeige $\mathrm{Sp}(v, w) = \mathbb{R}^2$.

   (b) Zeige, dass $\{(0,0)\}$, $\mathrm{Sp}(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, und $\mathbb{R}^2$ die einzigen Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

3. **Unterräume.** Sind $+$ und $\cap$ von Unterräumen zueinander distributiv, das heißt, gelten für alle Unterräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?

$$\begin{aligned} U \cap (V_1 + V_2) &= (U \cap V_1) + (U \cap V_2) \\ U + (V_1 \cap V_2) &= (U + V_1) \cap (U + V_2) \end{aligned}$$

   Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

   Für zwei Untervektorräume V_1 und V_2 eines Vektorraums V gilt

$$V_1 + V_2 = \{u + v \mid u \in V_1,\ v \in V_2\}.$$

4. **Vektorräume und Gleichungen.** Sei K ein Körper. Fixiere $x \in K^n$ und $b \in K^m$. Definiere

$$U := \{A \in M_{m \times n}(K) \mid A \cdot x = b\}.$$

   Für welche Werte von x und b ist $U \subseteq M_{m \times n}(K)$ ein Untervektorraum?

5. **Polynome.** Zeige, dass $K[x]$ *nicht* endlichdimensional über K ist.

6. **Folgen.**

(a) Sei K_0^∞ die Menge der Folgen mit endlichem Träger, das heisst

$$K_0^\infty = \{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}\, a_i \in K \wedge \exists N \geqslant 0 : a_n = 0\, \forall n \geqslant N\}.$$

Gebe eine erzeugende Teilmenge $E \subsetneq K_0^\infty$ an, die bezüglich der Inklusion so klein wie möglich ist.

(b) Wiederhole dies für die Menge

$$K_{cst}^\infty := \{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}\, a_i \in K \wedge \exists c \in K \exists N \geqslant 0 : a_n = c\, \forall n \geqslant N\},$$

der irgendwann konstanten Funktionen.