Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 6

1. Entscheide und beweise, welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig oder abhängig über $\mathbb{R}$ sind:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

2. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

   (a) $\{(1,0,0),(0,2,t),(2,4,t^2)\}$ für ein t in $\mathbb{R}$;

   (b) Die Menge der Spalten einer oberen Dreiecksmatrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $A_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Eine obere Dreiecksmatrix ist eine Matrix, deren Einträge unter der Diagonalen 0 sind. In anderen Worten eine Matrix $A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, sodass $A_{ij} = 0$ gilt, wenn $j < i$ ist.

   (c) $\{f,g\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wobei $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ sind;

   (d) $\{f,g\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wobei $f(x) = e^{rx}$ und $g(x) = e^{sx}$ für fixierte $s, r \in \mathbb{R}$ gilt.

3. Seien $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

   (b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

   Beweisen Sie, dass $\mathrm{Sp}(A_1, A_2) = M$.

   (c) Finden Sie $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist. Gilt $\mathrm{Sp}(A_1, A_2, A_3) = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ für jedes diese Bedingung erfüllende A_3?

4. Zeigen Sie, dass

$$U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5) \mid \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$$

ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.

5. Sei V ein Vektorraum über einen beliebigen Körper K, sodass V eine abzählbare Basis besitzt. Zeige, dass jede linear unabhängige Menge $S \subseteq V$ abzählbar oder endlich ist.

6. Zeige, dass die Funktionen

$$\varphi_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{a+x}$$

für $a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Verwende, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

Multiple Choice Fragen. Es kann jeweils mehr als eine Antwort korrekt sein.

Frage 1. Sei V ein Vektorraum über K. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

- ○ Sei $v \in V$, dann ist die Menge

$$W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in K : w = \lambda v\}$$

ein Unterraum von V.

- ○ Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\mathrm{Sp}(W) = W$.
- ○ Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2)$.
- ○ Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\mathrm{Sp}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) \cap \mathrm{Sp}(S_2)$.

Frage 2. Sei V ein Vektorraum und betrachte $S_1, S_2 \subseteq V$ mit $S_1 \subsetneq S_2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Wenn S_1 linear unabhängig ist, dann ist S_2 wann ebenfalls linear unabhängig?

- ○ Immer
- ○ Nie
- ○ Manchmal

Wenn andererseits S_2 linear unabhängig ist, dann ist S_1 wann ebenfalls linear unabhängig?

- ○ Immer
- ○ Nie
- ○ Manchmal

(b) Beantworte die vorherige Frage erneut, wobei “linear unabhängig” durch “Erzeugendensystem von V” wird.

(c) Beantworte die vorherige Frage erneut, wobei “linear unabhängig” durch “Basis von V” wird.