Serie 7

1. Berechne die Dimension und gebe eine Basis der folgenden Vektorräume an.
   (a) Der Untervektorraum der oberen Dreiecksmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ (diese haben wir in Aufgabe 2. b) der 6. Serie definiert);
   (b) Der Untervektorraum der Diagonalmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$. Diagonalmatrizen sind der Form $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ immer wenn $i \neq j$;
   (c) Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen
   $$W = \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\right\},$$
   wobei $\cdot^T$ für die Operation $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto (a_{ji})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ steht;
   (d) Der Vektorraum jener Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, sodass die Summe der Zeilen von A der Nullvektor ist.

2. Sei W der Untervektorraum aufgespannt von den Vektoren
   $$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimme ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge W ist.
   (b) Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 alle möglichen Basen von W aus. Wieviele sind es?

3. Bestimme eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:
   (a) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von
   $$\begin{aligned} x + y - z &= 0\\ 3x + y + 2z &= 0\\ 2x + 3z &= 0\end{aligned}$$
   (b) $\{0\}$;
   (c) $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + iw = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$;
   (d) $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + iw = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

4. Sei K ein Körper, setze $g(X) := X + 5 \in K[X]$, und sei $d \geqslant 1$. Bestimme die Dimension des Vektorraums
   $$W = \{h \in K[X] \mid \deg(h) \leqslant d \wedge \exists f \in K[X] : h = gf\}.$$

5. Betrachte die folgenden Unterräume von K^n :

$$U := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \right\},$$
$$D := \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}\,.$$

Bestimme eine Basis und die Dimension der Unterräume $U, D, U \cap D$ und $U + D$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, den Fall zu betrachten, in dem K ein solches Körper ist, dass $n \cdot 1 = 0$.

6. Bestimme eine Basis und die Dimension des Vektorraums

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \wedge (f + f'' = 0)\}.$$

Hinweis: Bemerken Sie, dass f, f', f'' existieren und stetig sind. Folgender Satz aus der Analysis darf verwendet werden: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ ist die einzige stetige Lösung von

$$\begin{cases} f + f'' &= \quad 0 \\ f(0) &= \quad f'(0) \quad = \quad 0 \end{cases}$$