D-MATH
Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Lineare Algebra I

HS 2022

Serie 8

1. Sei F ein Körper. Finde ein Komplement der folgenden Untervektorräume von $M_{n\times n}(F)$ (Siehe Serie 7 für die Definitionen):
   (a) Der Untervektorraum der oberen Dreiecksmatrizen
   (b) Der Untervektorraum der Symmetrischen Matrizen

2. Seien $b, c \in \mathbb{R}$. Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynomfunktionen in einer Variable in $\mathbb{R}$. Definiere $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ durch
$$Tp = \left(3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)dx + cp(0)^2\right).$$
   Zeige, dass T dann und nur dann linear ist wenn $b = c = 0$.

3. Seien U und V zwei 4-dimensionale UVR von $\mathbb{C}^6$. Zeige, dass $U \cap V$ zwei linear unabhängige Vektoren enthält.

4. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Nehme an, dass $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ linear unabhängig ist und sei $w \in V$. Beweise, dass
$$\dim \operatorname{Sp}(v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_m + w) \geqslant m - 1.$$

5. Sei V ein Vektorraum über einen Körper F und betrachte drei lineare UVR U_1, U_2, U_3, sodass $V = U_1 + U_2 + U_3$ und für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ gilt, dass $U_i \cap U_j = \{0\}$.

   Existiert für jedes $v \in U_1 + U_2 + U_3$ ein eindeutiges Tripel (u_1, u_2, u_3) mit $u_i \in U_i$, sodass $v = u_1 + u_2 + u_3$?

6. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einen Körper F und sei
$$V \supseteq U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_k \supseteq \cdots$$
   eine unendliche Folge verschachtelter UVR.
   (a) Zeige, dass diese Folge irgendwann konstant wird. Beweise also, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geqslant N$ gilt, dass $U_n = U_N$.
   (b) Ist die gleiche Aussage auch erfüllt, wenn V unendlichdimensional ist?
   (c) Nehmen wir an, dass V unendlichdimensional ist und, dass $\forall n \in \mathbb{N} \dim U_n \geqslant 1$ ist. Was können Sie über $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ sagen?

Multiple Choice Fragen. Es kann jeweils mehr als eine Antwort korrekt sein.

Frage 1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$
- $f : K^3 \to K^2$, $(x, y, z) \mapsto (\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \varepsilon y + \eta z)$ für fixe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ in the field K

Frage 2. Welche der folgenden linearen Abbildungen kann als $x \mapsto Ax$ geschrieben werden, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x + y, x, 2y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + y, x + 2z)$