Serie 9

1. Sei V ein eindimensionaler Vektorraum über einen Körper K und $T \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeige, dass ein $\lambda \in K$ existiert, sodass für alle $v \in V$ die Gleichung $Tv = \lambda v$ gilt. Erklären Sie dann, warum ein Isomorphismus $V \to K$ von der Wahl der Basis abhängt, während ein Isomorphismus von $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ nach K dies nicht tut.

2. Wir schreiben $\mathbb{R}[x]_d$ für die Menge der Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$, deren Grad kleinergleich d ist. Sei $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_2)$ die Ableitungsabbildung. Es gilt also $Dp = p'$. Finde geeignete Basen von $\mathbb{R}[x]_3$ und $\mathbb{R}[x]_2$, sodass die Darstellungsmatrix von D relativ zu diesen Basen gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K. Betrachte einen linearen Unterraum $U \subsetneq V$ und S ein nicht triviales Element von $\mathrm{Hom}_K(U, W)$ (in anderen Worten bildet S nicht alles auf 0 ab.). Wir definieren $T : V \to W$ als

$$Tv = \begin{cases} Sv, & \text{if } v \in U \\ 0, & \text{if } v \in V \setminus U \end{cases}$$

   Ist T eine lineare Abbildung?

4. Seien U, V, W Vektorräume über einen Körper K und seien $T : V \to W$ und $S : W \to U$ lineare Abbildungen. Zeige:

   (a) Es gilt
   $$\mathrm{rank}(S \circ T) \leqslant \min(\mathrm{rank}(S), \mathrm{rank}(T)).$$

   (b) Wenn T surjektiv ist gilt $\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(S)$.

   (c) Wenn S injektiv ist gilt $\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(T)$.

5. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ mit der Eigenschaft $P^2 := P \circ P = P$ heisst idempotent oder eine Projektion. Zeige:

   (a) Für jede Projektion P ist $\mathrm{Bild}(P)$ ein linear Komplement von $\mathrm{Kern}(P)$ in V.

   (b) Für beliebige Untervektorräume $W_1, W_2 \subset V$, sodass W_1 ein Komplement von W_2 in V ist, existiert eine eindeutige Projektion $P : V \to V$ mit
   $$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2.$$

6. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeige:

   (a) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

   $$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

   ein Unterraum von V.

   (b) Es gilt

   $$\dim f^{-1}(W') = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim\left(\operatorname{Bild}(f) \cap W'\right)$$

Übungen, die nicht vorgerechnet werden

7. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K und sei $T : V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus. Zeige:

   (a) Linear unabhängige Mengen werden von T auf linear unabhängige Mengen abgebildet.

   (b) Erzeugende Mengen von V werden von T auf erzeugende Mengen von W abgebildet.

   (c) Basen von V werden von T auf Basen von W abgebildet.

8. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{Q}$. Wir nennen eine Abbildung $f : V \to W$ additiv, wenn

   $$\forall x \in V\, \forall y \in V : f(x+y) = f(x) + f(y).$$

   Zeige

   $$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ is additive}\}.$$

Multiple Choice Fragen. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von $\mathbb{R}^2$ und (e_1, e_2) die Standardbasis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in Bezug auf $\mathcal{A}$ als Basis der Definitionsbereich und $\mathcal{B}$ als Basis der Zielbereich. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils die Standardbasis sind, ist f eine Drehung um den Punkt $(0, 0)$.

- Wenn $\mathcal{A}$ die Standardbasis und $\mathcal{B} = (e_2, -e_1)$ ist, ist f eine Punktspiegelung an dem Punkt $(0, 0)$.
- Wenn $\mathcal{A}$ die Standardbasis und f die Identität ist, ist $\mathcal{B} = (-e_2, e_1)$.
- Wenn $\mathcal{B}$ die Standardbasis und f die Spiegelung an der y-Achse ist, ist $\mathcal{A} = (e_2, e_1)$.

Frage 2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Sei V einen $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n. Die Abbildung $V \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.
- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(f) \neq \{0\}$. Dann existiert ein Vektor $v \neq 0$, der gleichzeitig im Kern und im Bild von f liegt.
- Falls der Kern einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Null-vektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.