Serie 10

1. Betrachte den reellen Vektorraum $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Berechne das Quadrat von
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   (b) Finde eine Formel für die n-te Potenz von $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Sei $\mathbb{R}[X]_n$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leqslant n$ mit reellen Koeffizienten.

   (a) Zeige, dass
   $$F : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n, \quad p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

   (b) Bestimme die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $\mathbb{R}[X]_n$.

3. Sei K ein Körper.

   (a) Betrachte die Matrizen
   $$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & A_2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$
   mit $A_1 \in M_{k\times k}(K)$ und $A_2 \in M_{(n-k)\times(n-k)}(K)$ für ein $k \geqslant 1$, und
   $$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & B_2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$
   mit $B_1 \in M_{k\times k}(K)$ und $B_2 \in M_{(n-k)\times(n-k)}(K)$. Zeige:
   $$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & A_2 \cdot B_2 \end{pmatrix}$$

   (b) Sei A wie oben definiert und seien A_1, respektive A_2, invertierbar in $M_{k\times k}(K)$, respektive $M_{(n-k)\times(n-k)}(K)$. Zeige, dass dann A invertierbar ist.

   (c) Betrache den Untervektorraum U der oberen Dreiecksmatrizen in $M_{n\times n}(K)$. Zeige, dass das Produkt von zwei Elementen in U wieder in U enthalten ist.

4. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K.

(a) Zeige: Wenn $2 \leqslant \dim V \leqslant \dim W$ gilt, dann ist

$$\{T \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid T \text{ is not injective}\}$$

kein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(V, W)$.

(b) Zwige: Wenn $\dim V \geqslant \dim W \geqslant 2$ gilt, so ist

$$\{T \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid T \text{ is not surjective}\}$$

kein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(V, W)$.

5. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimme $g \circ f$ und die Darstellungsmatrix ...

  (i) von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

  (ii) von g bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

  (iii) von $g \circ f$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.

6. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Betrachte zwei lineare Abbildungen T_1 and T_2 von V zu K, die den gleichen Kern haben. Zeige, dass eine Konstante $c \in K$ existiert, sodass $T_1 = cT_2$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie Serie 9 Übung 1.