Serie 11

1. Betrachte endlichdimensionale Vektorräume V, W über einem Körper K. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeige, dass $\mathrm{rank}(T) = 1$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine Basis $\mathcal{C}$ von W existiert, sodass alle Einträge der Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ von T bezüglicher der Basen 1 sind.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und betrachte $S, T, U \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $STU = \mathrm{Id}_V$. Zeige, dass T invertierbar ist und $T^{-1} = US$ gilt.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei ausserdem $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ und seien $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basen von V. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (a) T ist invertierbar.

   (b) Die Spalten von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sind linear unabhängig in K^n_{Spal}.

   (c) Die Spalten von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ spannen K^n_{Spal} auf.

   (d) Die Zeilen von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sind linear unabhängig in K^n_{Zeile}.

   (e) Die Zeilen von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ spannen K^n_{Zeile} auf.

4. Sei V ein beliebiger endlichdimensionaler Vektorraum. Beweise oder widerlege:

   (a) Sei $V' \subset V$ ein Unterraum. Jeder Automorphismus $f : V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\bar{f} : V \to V$ fortgesetzt werden.

   (b) Für jeden Endomorphismus $f : V \to V$, ist $\mathrm{Im}(f)$ ein linear Komplement von $\mathrm{Ker}(f)$ in V.

   (c) Keine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ existiert, sodass

   $$\mathrm{rank}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T).$$

5. Betrachte den Vektorraum $M_{2\times 2}(K)$ der 2×2 Matrizen über einem Körper K.

   (a) Zeige, dass für $A \in M_{2\times 2}(K)$ aus $A^2 \neq 0$ schon $A^k \neq 0$ für alle $k \geqslant 3$ folgt.

   (b) Finde einen Körper K und eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(K) \smallsetminus \{0\}$, sodass $\exists n \in \mathbb{N} : A^n = 0$ erfüllt ist.

6. Bestimme die Ränge der folgenden rationalen $n \times n$-Matrizen, d.h. Elemente von $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$, in Abhängigkeit von der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(kl)_{k,l=1,\ldots,n}$;

(b) $\big((-1)^{k+l}(k+l-1)\big)_{k,l=1,\ldots,n}$;

(c) $\left(\dfrac{(k+l)!}{k!l!}\right)_{k,l=0,\ldots,n-1}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die letzte Matrix von 0 bis n-1 indiziert ist. Verwenden Sie die Induktion, um die Formel zu finden.