Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 12

1. Bestimme ob die jeweils gegebene Matrix invertierbar ist. Falls dem so ist, berechne ihre Inverse.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

2. Zeigen Sie, dass eine quadratische Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn ihre Transponierte A^T invertierbar ist, und dann ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. (a) Seien V, W zwei n-dimensionale Vektorräume über einen Körper K. Seien $S \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $T \in \mathrm{Hom}(W, V)$, sodass $T \circ S = \mathrm{Id}_V$ ist. Zeige, dass S invertierbar ist und T die Inverse von S ist.

   (b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$, sodass $A \cdot B = I_n$. Zeige, dass A invertierbar ist und die Inverse B hat.

4. Betrachte $n \times n$-Matrizen A und B über K.

   (a) Zeige: Ist A oder B invertierbar, so sind AB und BA ähnlich.

   (b) Gilt die Folgerung auch ohne die Bedingung in (a)?

5. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, für welche Werte des Parameters α die folgende Matrix über $\mathbb{Q}$ invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2\alpha \\ -6 & 2 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

6. Beweisen Sie den

   Satz. *(Bruhat-Zerlegung)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P, d.h. eine Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte einen einzigen von Null verschiedenen Eintrag mit dem Wert 1 hat, und invertierbare obere Dreiecksmatrizen B und B', so dass gilt

   $$A = BPB'.$$

   Hinweis: Wähle eine invertierbare obere Dreiecksmatrix U, so dass die Summe der Anzahlen der führenden Nullen in allen Zeilen der Matrix UA maximal ist. Sodann finde eine Permutationsmatrix Q, so dass QUA eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

   Die Linksmultiplikation einer Matrix A mit einer Permutationsmatrix P permutiert die Zeilen von A. Wenn zum Beispiel P an der Stelle (i, j) den Eintrag 1 hat, so ist die j–te Zeile von A gleich die i-te Zeile von PA.

Single Choice Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Die Basiswechselmatrix ist die Darstellungsmatrix der Identitätsabbildung bezüglich der entsprechenden Basen.

   (b) Jeder endlich dimensionale Vektorraum ist isomorph zu K^n für ein $n \geqslant 0$.

   (c) Der Rang jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ ist mindestens $\min\{n, m\}$.

   (d) Die Darstellungsmatrix eines Isomorphismus ist invertierbar.

2. Betrachte $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum mit der geordneten Basis $\mathcal{B} := (1, i)$. Die Matrix $[\dots]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ der folgenden linearen Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

   (a) Die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$

   (b) $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

   (c) $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$

   (d) $z \mapsto iz$

3. Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ ist

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

4. Für jede $n \times m$-Matrix A und jede invertierbare $n \times n$-Matrix B gilt

   (a) $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(B) \cdot \mathrm{rank}(A)$

   (b) $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(A)$

   (c) $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(A)$

   (d) $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(B)$

Multiple Choice Fragen.

1. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $\mathbb{R}[x]_2$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2), \quad \mathcal{C} = (x^2, (x+1)^2, (x+2)^2)$$

   Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $Q := [\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[x]_2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

   (a) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (c) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (e) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (f) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ und $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir schreiben

$$r := \operatorname{rank}(A - I_n) \quad \text{und} \quad s := \operatorname{rank}(PAP^{-1} - I_n).$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $r = s$;

(b) $r \neq s$;

(c) $r > s$;

(d) $r < s$;

(e) if $r < n$, $\exists v \in V$ such that $Av = v$.