Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Serie 13

Diese Serie soll in der Woche vor dem Frühjahrssemester 2023 abgegeben werden.

1. Betrachte den Unterraum

$$U := \left\langle (2,2,2,2,2)^T, (1,2,2,2,2)^T, (1,1,2,2,2)^T \right\rangle$$

von $V := \mathbb{R}^5$. Bestimme eine Teilmenge der Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, welche sich bijektiv auf eine Basis von V/U abbildet.

2. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K. Sei ausserdem $U \subseteq V$ ein Unterraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Betrachte die von der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums induzierte lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \bar{f} : & V/U & \to & W \\ & v + U & \to & f(v) \end{array}$$

Zeige:

(a) $\operatorname{Ker}(\bar{f}) = \operatorname{Ker}(f)/U$.

(b) $\bar{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \operatorname{Ker}(f)$ ist.

(c) $\bar{f}$ ist surjektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

(d) Ist f surjektiv, so induziert f einen Isomorphismus $V/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} W$.

3. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K. Betrachte eine Funktion T von V nach W. Wir definieren den Graph von T, geschrieben als $\Gamma(T)$, als die Teilmenge von $V \oplus W$ definiert durch

$$\Gamma(T) = \{(v, Tv) \in V \oplus W : v \in V\}.$$

Zeige, dass T genau dann eine lineare Abbildung ist, wenn der Graph von T ein Untervektorraum von $V \oplus W$ ist.

Remark. Formal können wir die Funktion $T : V \to W$ als Teilmenge T von $V \oplus W$ auffassen, sodass für jedes $v \in V$ genau ein Element der Form $(v, w) \in T$ existiert. In anderen Worten ist eine Funktion formal das, was wir hier als Graph definieren. Normalerweise denken wir über Funktionen nicht auf diese formale Weise nach. Unter Verwendung dieser formalen Interpretation von T können wir die Aufgabe wie folgt umformulieren: Beweise, dass eine Funktion T von V nach W linear ist genau dann wenn T ein Unterraum von $V \oplus W$ ist.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

   (a) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und W ein lineares Komplement. Definiere einen Isomorphismus zwischen V und $U \oplus W$.

   (b) Zeige, dass jede lineare Abbildung $\alpha : U \to K$ zu einer Abbildung $\tilde{\alpha}$ auf ganz V fortgesetzt werden kann. Hängt $\tilde{\alpha}$ von der Wahl des Komplements von U ab?

   (c) Definiere einen Isomorphismus

$$V^* \cong U^* \oplus W^*.$$

5. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis eines Vektorraums V, sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die dazu duale Basis des Dualraums V^*, und sei $((v_1^*)^*, \ldots, (v_n^*)^*)$ die zu B^* duale Basis des Bidualraums $(V^*)^*$. Zeige, dass der natürliche Isomorphismus

$$\tau : V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*, \quad v \mapsto \tau(v)$$

   jedes v_j auf das entsprechende $(v_j^*)^*$ abbildet.

6. Seien U, V, W_1 und W_2 endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $n := \dim(V)$. Zeige:

   (a) $\mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) \cong \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_2)$

   (b) $\mathrm{Hom}(V \oplus U, W_1) \cong \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(U, W_1)$

   (c) $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

   (d) Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V, V) & \to & \mathrm{Hom}(V, V)^* \\ T & \mapsto & [S \mapsto \mathrm{tr}(S \circ T)], \end{array}$$

   wobei $\mathrm{tr} \in \mathrm{Hom}(V, V)^*$ die *Spur* ("trace" auf Englisch) ist, definiert durch

$$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^{n} ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})_{ii},$$

   für irgendeine Wahl von Basis $\mathcal{B}$ von V.

   Remark. Sie können dies in der obigen Übung verwenden, aber als Bonus könnten Sie zunächst zeigen, dass die Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V, V) \mapsto \mathrm{tr}(T)$ unabhängig von der Wahl der Basis von V ist.

Single Choice. Jede Aufgabe hat genau eine richtige Lösung.

1. Sei $\dim V = 4$. Dann gibt es $\varphi \in V^*$ mit $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.
   (a) Richtig
   (b) Falsch

2. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum ist der Dualraum eines anderen endlich-dimensionalen Vektorraumes.
   (a) Richtig
   (b) Falsch

3. Die Menge der invertierbaren reellen $n \times n$-Matrixen ist...
   (a) kein reeller Unterraum von $M_n(\mathbb{R})$
   (b) ein reeller Unterraum von $M_n(\mathbb{R})$

4. Sei $f : V \to W$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen zwei K-Vektorräumen. Welche der folgenden fünf Aussagen ist nicht äquivalent zu den anderen?
   (a) f ist injektiv.
   (b) Die duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ ist surjektiv.
   (c) Das Nullelement von V ist das einzige Element, das auf das Nullelement von W abgebildet wird.
   (d) Es existiert ein Homomorphismus $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.
   (e) Für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ existiert ein $\ell \in W^*$ mit $\ell(f(v)) \neq 0$.
   (f) Alle fünf Aussagen sind äquivalent.

Multiple Choice Fragen.

1. Für welche Werte von x ist die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 3 & x \\ 0 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ nicht invertierbar?

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

   (e) 4