
1.4 Mengenlehre und Abbildungen

1.4.1 Naive Mengenlehre

Georg Cantor definierte 1895 in [Can95] den Begriff einer Menge wie folgt:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denken (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Also sind die zentralen Annahmen der naiven Mengenlehre (oder Cantorsche Mengenlehre) die folgenden Punkte.

- (1) Eine **Menge** besteht aus beliebigen unterscheidbaren Elementen. Etwaige Vielfachheiten werden ignoriert.
- (2) Eine Menge ist unverwechselbar durch ihre **Elemente** bestimmt.
- (3) Jede Eigenschaft $A(x)$ definiert die **Menge der Objekte** $\{x \mid A(x)\}$, die diese Eigenschaft besitzen (das heisst, die Aussage $A(x)$ erfüllen).

Manchmal beschreiben wir eine Menge durch eine konkrete Auflistung ihrer Elemente (zum Beispiel in der Form $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$). Die **leere Menge**, geschrieben als $\{\}$ oder auch \emptyset , ist die Menge, die keine Elemente enthält. Mengen werden teilweise auch **Familien** (oder Kollektionen, Ansammlungen) genannt. Wir schreiben „ $x \in X$ “, falls x ein Element der Menge X ist. Je nach Zusammenhang nennen wir die Elemente mitunter auch Punkte, Zahlen oder Vektoren. Falls x kein Element der Menge X ist (also $\neg(x \in X)$), so schreiben wir auch $x \notin X$.

Definition 1.14 (Inklusionen). Wir sagen, dass eine Menge P **Teilmenge** einer Menge Q ist und schreiben $P \subseteq Q$, falls für alle $x \in P$ auch $x \in Q$ gilt (in Prädikatenlogik $\forall x \in P : x \in Q$). Wir sagen, dass P eine **echte Teilmenge** von Q ist und schreiben $P \subsetneq Q$, falls P eine Teilmenge von Q ist, aber nicht gleich Q ist. Wir schreiben $P \not\subseteq Q$, falls P **keine Teilmenge** von Q ist (also $\neg(P \subseteq Q)$ gilt).

Äquivalente Formulierungen für „ P ist eine Teilmenge von Q “ sind „ P ist in Q **enthalten**“ und „ Q ist eine **Obermenge** von P “, was wir auch als „ $Q \supseteq P$ “ schreiben. Die Bedeutung der Aussage „ Q ist eine **echte Obermenge** von P “, geschrieben $Q \supsetneq P$, ergibt sich nun implizit.

Für eine Menge X und eine Aussage „ $A(x)$ “ über Elemente $x \in X$ schreiben wir auch

$$\{x \in X \mid A(x)\} = \{x \mid x \in X \wedge A(x)\} \quad (1.8)$$

für die Teilmenge aller $x \in X$ für die die Aussage „ $A(x)$ “ gilt.

Übung 1.15. Seien P, Q Mengen. Formuliere die Aussagen „ P ist eine echte Teilmenge von Q “ und „ P ist keine Teilmenge von Q “ in Prädikatenlogik.

Wegen der zweiten Annahme der naiven Mengenlehre sind zwei Mengen P, Q genau dann gleich, wenn $P \subseteq Q$ und $Q \subseteq P$ gelten. Insbesondere könnte $\{x, y\} = \{z\}$ gelten, falls

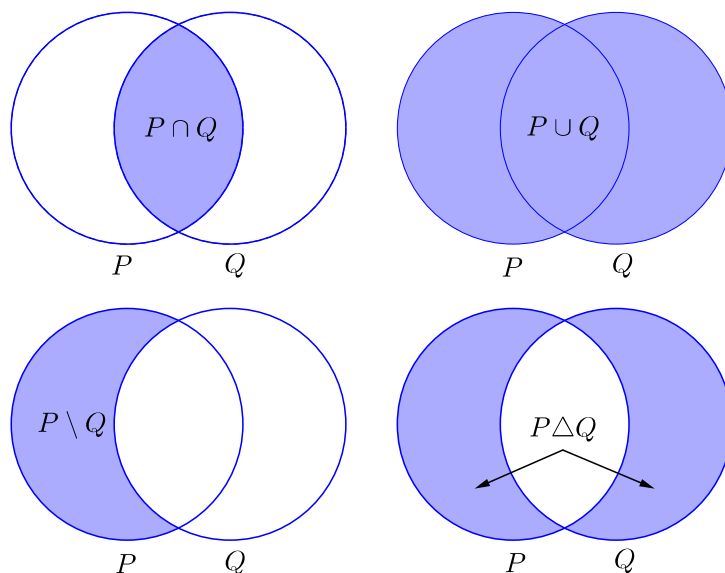
$x = y = z$ ist. Also gibt es für Elemente einer Menge keine Vielfachheiten, aber es ist prinzipiell erlaubt ein Element mehrmals als Element einer Menge aufzulisten. Im Folgenden führen wir geläufige Konstruktionen von Mengen aus gegebenen Mengen ein.

Definition 1.16 (Mengenoperationen). Seien P, Q zwei Mengen. Der **Durchschnitt** $P \cap Q$, die **Vereinigung** $P \cup Q$, das **relative Komplement** $P \setminus Q$ und die **symmetrische Differenz** $P \Delta Q$ sind durch

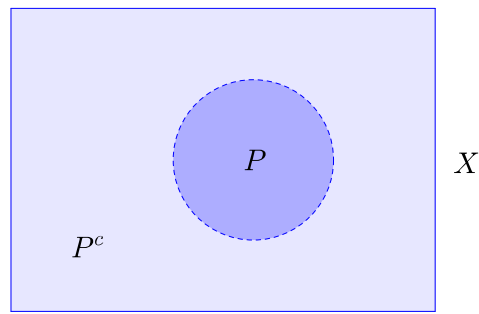
$$\begin{aligned} P \cap Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \in Q\} \\ P \cup Q &= \{x \mid x \in P \vee x \in Q\} \\ P \setminus Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\} \\ P \Delta Q &= (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P) = \{x \mid x \in P \text{ XOR } x \in Q\} \end{aligned}$$

definiert. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer gegebenen (Grund-) Menge X sind, dann ist das **Komplement** P^c von P (in X) definiert durch $P^c = X \setminus P$. Dies ist alles in den Bildern 1.4 und 1.5 veranschaulicht.

Im Zusammenhang dieser Definitionen wollen wir noch erwähnen, dass man der Komplementbildung zu einer Grundmenge immer die höchste Priorität und der Vereinigungsoperation die geringste Priorität zuordnet. Also sollte man für Teilmengen A, B, C, D, E einer Grundmenge X zum Beispiel den Ausdruck $A^c \cup B \setminus C \cup D \cap E$ als $(A^c) \cup (B \setminus C) \cup (D \cap E)$ lesen. Im Zweifel schreibt man aber lieber eine Klammer zu viel um Verwirrungen zu vermeiden.



Figur 1.4: Schnitt, Vereinigung, Komplement beziehungsweise symmetrische Differenz von P, Q . Skizzen dieser Art nennen sich auch Venn-diagramme.



Figur 1.5: Das Komplement $P^c = X \setminus P$ von P in X .

Übung 1.17 (Distributivgesetze). Zeigen Sie die folgenden Distributivgesetze:

(i) Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie

$$(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

(ii) Seien P, Q, R Mengen. Zeigen Sie

$$(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$$

$$(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R)$$

Können Sie auch Kommutativ- und Assoziativgesetze formulieren?

Übung 1.18 (Gesetze von De Morgan). Seien P, Q Teilmengen einer Grundmenge X . Zeigen Sie den folgenden Spezialfall der De Morganschen Gesetze:

$$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c,$$

$$(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c.$$

Erläutern Sie Ihr Vorgehen an einem Bild im Stile von Figuren 1.4 und 1.5.

Wir verallgemeinern nun zwei Begriffe aus Definition 1.16:

Definition 1.19 (Beliebige Vereinigungen und Schnitte). Sei \mathcal{A} eine Kollektion von Mengen. Dann definieren wir die **Vereinigung** der Mengen in \mathcal{A} als

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$

Falls \mathcal{A} eine nicht-leere Kollektion von Mengen ist, so definieren wir auch den **Durchschnitt** über alle Mengen in \mathcal{A} durch

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

Falls wir die Vereinigung nicht über alle Mengen in \mathcal{A} nehmen wollen, sondern nur über solche, die eine gewisse Eigenschaft $E(A)$ erfüllen, dann schreiben wir dafür auch $\bigcup_{A \in \mathcal{A}: E(A)} A$ und analog für den Durchschnitt. Falls $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$, dann schreiben wir auch

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$

und

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}.$$

Wir bemerken, dass wir den Durchschnitt $\bigcap_{A \in \emptyset} A$ nicht definieren wollen. Würden wir obige Definition in diesem Fall anwenden, so erhielten wir die „Zusammenfassung aller Objekte unserer Anschauung und unseres Denkes“ im Sinne des eingangs erwähnten Zitats von Georg Cantor. Wir wollen diese Zusammenfassung nicht betrachten und auch kein Symbol dafür einführen. Falls wir aber im Rahmen einer Diskussion nur Teilmengen einer bestimmten vorgegebenen Grundmenge X betrachten, so werden wir den Durchschnitt $\bigcap_{A \in \emptyset} A$ als X definieren. Dies ist mit den Aussagen in folgender Übung kompatibel.

Wichtige Übung 1.20 (De Morgansche Gesetze). *Sei \mathcal{A} eine Kollektion von Teilmengen einer Grundmenge X . Zeigen Sie die allgemeine Form der De Morganschen Gesetze:*

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c &= \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c \\ \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c &= \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c. \end{aligned}$$

Übung 1.21. *Was ist die Menge*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\},$$

wobei n wie in Definition 1.19 über alle natürlichen Zahlen läuft, und wie nennen wir dies?

Für unsere Zwecke wird folgende Definition ebenfalls nützlich sein:

Definition 1.22 (Disjunktheit). Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \{\}$. In diesem Fall wird ihre Vereinigung $A \cup B$ **disjunkte Vereinigung** genannt und auch als $A \sqcup B$ geschrieben. Für eine Kollektion \mathcal{A} von Mengen, sagen wir, dass die Mengen in \mathcal{A} **paarweise disjunkt** sind, falls für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \neq A_2$ gilt $A_1 \cap A_2 = \{\}$. Die Vereinigung der Mengen in \mathcal{A} wird dann auch **disjunkte Vereinigung** genannt und wird in diesem Fall auch oft als $\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A$ geschrieben.

Wir wenden uns nun einer weiteren, intuitiv vielleicht bekannten, Mengenkonstruktion zu:

Definition 1.23 (Kartesisches Produkt). Für zwei Mengen X und Y ist das **kartesische Produkt** $X \times Y$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) wobei $x \in X$ und $y \in Y$. In

Symbolen,

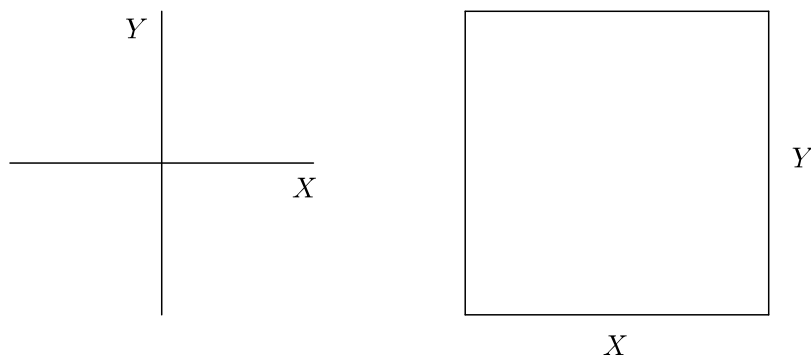
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Allgemeiner ist das kartesische Produkt von n -Mengen X_1, X_2, \dots, X_n definiert als

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Weiters definieren wir X^n , für eine natürliche Zahl n , als das n -fache kartesische Produkt von X mit sich selbst. Das heisst, $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$ und so weiter.

Graphisch (meist schematisch) wird das kartesische Produkt $X \times Y$ zweier Mengen X, Y wie in folgendem Bild dargestellt.



Figur 1.6: Zwei Darstellungen von $X \times Y$.

Wir wollen kurz ein paar Beispiele dieser Konstruktion erwähnen.

Beispiel 1.24 (Einige kartesische Produkte). Falls $X = \{0, 1\}$ ist, dann ist

$$X^2 = \{0, 1\}^2 = \{(0, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1)\}.$$

Falls $X = \{a, b, c, \dots, z\}$ die Menge der Buchstaben im Alphabet ist, so kann man X^n mit der Menge aller möglichen (potenziell sinnfreien) Wörter der Länge n identifizieren. Die Menge der deutschen Wörter der Länge n bildet eine echte Teilmenge von X^n unter dieser Identifikation.

Übung 1.25 (Digitale Uhr). Die Menge der von einer digitalen Uhr angezeigten Uhrzeiten lässt sich als kartesisches Produkt zweier Mengen auffassen. Wie?

Übung 1.26 (Schnitte von Rechtecken). Seien X, Y Mengen und A, A' Teilmengen von X , B, B' Teilmengen von Y . Zeigen Sie die Formel

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Überzeugen Sie sich auch davon, dass es keine ähnliche Formel für die Vereinigung gibt.

Unsere vorerst letzte Konstruktion von Mengen ist in der nächsten Definition gegeben:

Definition 1.27 (Potenzmenge). Für eine Menge X ist die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ durch die Menge all ihrer Teilmengen gegeben, das heisst

$$\mathcal{P}(X) = \{Q \mid Q \text{ ist eine Menge und } Q \subseteq X\}.$$

Übung 1.28. *Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{\})$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\}))$.*

Wir empfehlen Ihnen, analog zu Abschnitt 1.3.3 eine Übersicht aller Abkürzungen in der Mengenlehre zusammenzustellen.

Der Grund, warum Obiges die naive Mengenlehre genannt wird, ist, dass sie Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts durch die **axiomatische Mengenlehre** (ZF- oder ZFC-Mengenlehre abhängig von einem weiteren Axiom - ZF steht für Zermelo-Fraenkel) ersetzt wurde. Denn die naive Mengenlehre kann sehr schnell zu Widersprüchen geführt werden:

Beispiel 1.29 (Russell 1903, [Rus03]). *Sei R die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, also*

$$R = \{X \mid X \text{ ist eine Menge und } X \notin X\}.$$

Stellt man nun die Frage, ob R selbst zu R gehören kann, so erhält man „ $R \in R \iff R \notin R$ “. Dies kann aber nicht gelten und ist also ein Widerspruch der naiven Mengenlehre (siehe [Rus03]).

Dieses Beispiel wird **Russell-Paradox** genannt (siehe auch diesen [Link](#)) und ist eine Version des sogenannten Lügner-Paradoxons („Dieser Satz ist falsch.“ oder „Ich lüge immer.“). Es entstand, da wir ohne vernünftige Einschränkungen das Bilden beliebiger neuer Mengen erlaubten. In der axiomatischen Mengenlehre werden nur gewisse Konstruktionen (wie zum Beispiel die Potenzmenge oder die Definition einer Teilmenge in (1.8) anstelle der dritten Annahme der naiven Mengenlehre) erlaubt, was dazu führt, dass die Menge R aus dem Russell-Paradox keine Menge mehr ist. Dies löst den Widerspruch auf: R kann sich somit nicht selbst enthalten, da R ja nur Mengen enthält. R wird in der axiomatischen Mengenlehre eine **Klasse** genannt. Weiters dürfen Klassen nicht als Elemente von Mengen oder Klassen auftreten.

Im folgenden bedienen wir uns der naiven Mengenlehre, da wir die Zeit nicht aufbringen können, die axiomatische Mengenlehre ausreichend zu besprechen und da wir auf jeden Fall nur „vernünftige“ Mengenkonstruktionen verwenden werden. (Dies macht vom streng logischen Standpunkt wenig Sinn, ist aber ein notwendiger Kompromiss.)

Übung 1.30 (Der Barber aus Sevilla). *Bart, der Barber in dem Dorf Sevilla, rasiert alle Männer von Sevilla, die sich nicht selbst rasieren. Sonst rasiert Bart aber niemanden. Rasier Bart sich selbst?*

1.4.2 Abbildungen

Der Begriff der Funktion ist für die Analysis, die Lineare Algebra, die Mathematik allgemein und ihre Anwendungen unentbehrlich.

Definition 1.31 (Funktionen und erste dazugehörige Begriffe). In Worten ausgedrückt ist eine **Funktion** f von der Menge X nach der Menge Y eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y = f(x) \in Y$ zuweist. Wir schreiben $f : X \rightarrow Y$ für eine Funktion von X nach Y , $x \mapsto f(x)$ für die Zuordnung, und sprechen manchmal auch von einer **Abbildung** oder einer **Transformation**. Zu einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ wird X der **Definitionsbereich** von f und Y der **Wertebereich** (oder **Zielbereich**) von f genannt. Im Zusammenhang mit der Funktion f wird ein Element x des Definitionsbereichs auch **Argument** und ein von der Funktion angenommenes Element $y = f(x) \in Y$ für ein $x \in X$ auch **Wert** der Funktion genannt.

Zwei Funktionen $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ und $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ gelten nur dann als **gleich**, falls die Definitionsbereiche $X_1 = X_2$ übereinstimmen, die Wertebereiche $Y_1 = Y_2$ übereinstimmen, und natürlich auch $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X_1$ gilt.

Das **Bild einer Funktion** $f : X \rightarrow Y$ ist die Menge

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}.$$

Falls $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und A eine Teilmenge von X ist, dann definieren wir die **Einschränkung** $f|_A : A \rightarrow Y$ durch $f|_A(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Umgekehrt wird die Abbildung f auch als eine **Fortsetzung** der Funktion $f|_A$ bezeichnet. Des Weiteren definieren wir das **Bild der Teilmenge** A unter f als

$$f(A) = f|_A(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x)\}.$$

Oft, aber bei weitem nicht immer, wird eine Funktion durch eine Formel wie zum Beispiel $y = x^2$ definiert. Wir wollen aber betonen, dass ohne Angabe des Definitionsbereichs und des Wertebereichs die Definition der Funktion unvollständig wäre (siehe auch Beispiel 1.35). Wir diskutieren hier kurz geläufige Art und Weisen, diesen Mangel zu beheben. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, so schreibt man auch

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$$

oder

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

wobei $f(x)$ eine konkrete Formel sein könnte. Beispielsweise wäre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ eine vollständig definierte Funktion in dieser Notation. Alternativ schreibt man auch

$$x \in X \mapsto f(x) \in Y,$$

also zum Beispiel $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, und hat auch hier Definitions- und Wertebereich angegeben. Wir sprechen „ \mapsto “ unter anderem als „wird abgebildet auf“ aus.

Wir wollen auch noch kurz den Begriff „wohldefiniert“ erwähnen. Angenommen wir wollen

X als Definitionsbereich und Y als Wertebereich verwenden und haben auch bereits ausgesprochen, wie wir jedem $x \in X$ ein $y \in Y$ zuordnen wollen. Aber vielleicht wissen wir noch nicht genau, ob oder warum diese Zuordnung für jedes x auch wirklich ein zugeordnetes $y \in Y$ findet. Oder vielleicht wissen wir noch nicht, warum dieses $y \in Y$ auch durch $x \in X$ eindeutig bestimmt wird. Beides sind aber fundamentale notwendige Forderung an einer Funktion $f : X \rightarrow Y$. Also wird einer der nächsten Schritte der Diskussion der Beweis dieser Forderungen sein. In diesem Zusammenhang sagen wir, dass f **wohldefiniert** ist, wenn wir eben zeigen konnten, dass die gewählte Zuordnung tatsächlich jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuordnet.

Also wenn wir von einer wohldefinierten Funktion $f : X \rightarrow Y$ sprechen, dann wollen wir damit die notwendige Eigenschaft einer Funktion, dass diese jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuordnet, betonen. Aber formal gesehen kann das Wort „wohldefiniert“ in der Aussage „ $f : X \rightarrow Y$ ist eine wohldefinierte Funktion.“ ersatzlos gestrichen werden, ohne dass sich der logische Inhalt der Aussage ändern würde.

Beispiel 1.32 (Erste Funktionen).

(a) Sei X eine Menge. Die **Identitätsabbildung** $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist die Funktion definiert durch $\text{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

(b) Seien X, Y Mengen und sei $y_0 \in Y$. Dann ist $f : X \rightarrow Y$ definiert durch $f(x) = y_0$ für alle $x \in X$ eine Funktion. Solche Funktionen werden **konstante Funktionen** genannt.

(c) Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Funktion

$$\mathbb{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin A \\ 1 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

wird die **charakteristische Funktion** von A genannt. Das Bild von $\mathbb{1}_A$ ist genau dann ganz $\{0, 1\}$, wenn die Menge A weder leer noch ganz X ist (Wieso?). Eine zweite ebenso übliche Notation für eine charakteristische Funktion ist $\chi_A = \mathbb{1}_A$.

(d) Für zwei Mengen X_1, X_2 definieren wir die **Projektionen**

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$$

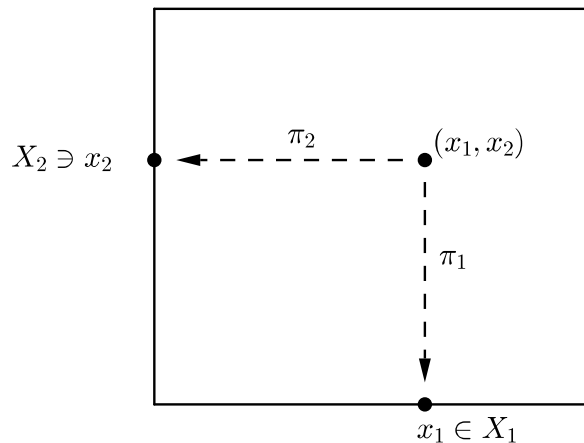
$$\pi_1((x_1, x_2)) = x_1$$

und

$$\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$$

$$\pi_2((x_1, x_2)) = x_2.$$

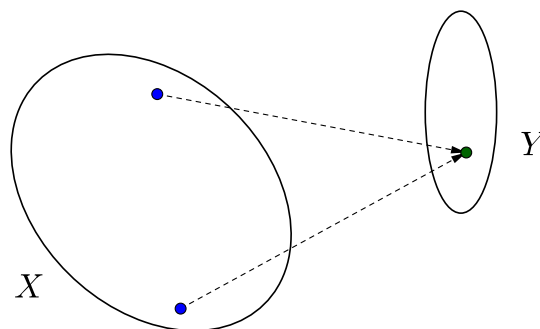
Das Bild von π_1 ist X_1 , falls X_2 nicht leer ist, und ebenso ist $\pi_2(X_1 \times X_2) = X_2$, falls $X_1 \neq \{\}$. Wir schreiben manchmal auch π_{X_1} anstelle von π_1 und π_{X_2} anstelle von π_2 .



Definition 1.33 (Drei Eigenschaften von Funktionen). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion.

- Die Funktion f heisst **injektiv** oder eine **Injektion** falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt, dass $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
- Die Funktion f ist **surjektiv**, eine **Surjektion** oder eine Funktion von X **auf** Y , falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
- Die Funktion f heisst **bijektiv**, eine **Bijektion** oder eine **eindeutige Abbildung**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist also nicht injektiv, falls zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in X$ existieren mit $f(x_1) = f(x_2)$. Des Weiteren ist f surjektiv genau dann wenn das Bild $f(X)$ der Funktion (siehe Definition 1.31) gleich Y ist. Ein Beispiel einer surjektiven aber nicht injektiven Funktion könnte wie im folgenden Bild aussehen (wobei die Pfeile die Abbildung beschreiben).



Applet 1.34 (Funktionen auf Mengen mit höchstens drei Elementen). In diesem Applet kann man verschiedene Funktionen f von einer Menge X mit höchstens drei Elementen nach einer Menge Y mit höchstens drei Elementen definieren. Hierbei kommt es zu verschiedenen Eigenschaften der Funktion.

Im folgenden Beispiel schreiben wir $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ für die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

Beispiel 1.35 (Ist Quadrieren bijektiv?). Ist $x \mapsto x^2$ injektiv, surjektiv oder bijektiv? Diese Frage macht wie oben erklärt (noch) keinen Sinn, da weder Definitionsbereich noch Wertebereich festgelegt wurden und wir diese zur Beantwortung der Frage kennen müssen. Folgende Beobachtungen bestätigen, dass die Antwort zur Frage in der Tat von der Wahl des Definitionsbereichs und des Wertebereichs abhängt:

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv, denn falls x, y zwei nicht-negative Zahlen mit $x < y$ sind, so gilt auch $x^2 < y^2$. Genauso folgt aus $x > y$, dass $x^2 > y^2$ ist. Sie ist jedoch nicht surjektiv: -1 ist nicht Element des Bildes von f , da Quadrate von reellen Zahlen niemals negativ sind.
- (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv (es existiert eine Wurzel), sie ist aber nicht injektiv, denn $f(1) = 1 = (-1)^2 = f(-1)$.
- (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.
- (d) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

Wir werden diese Aussagen später noch ausführlicher beweisen (d.h. auf die noch einzuführenden Axiome der reellen Zahlen zurückführen).

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Funktion. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ ein eindeutig bestimmtes $x \in X$, so dass $y = f(x)$: Da f surjektiv ist, existiert ein solches x und da f injektiv ist, kann es höchstens ein solches x geben. Daher rührt auch die Bezeichnung „eineindeutige Abbildung“ für eine Bijektion. Insbesondere kann man wie folgt eine Abbildung definieren.

Definition 1.36 (Umkehrabbildung). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Bijektion. Die **Umkehrabbildung** (**Inverse Abbildung** oder auch kurz **f invers**) $f^{-1} : Y \rightarrow X$ von f ist die Abbildung, welche jedem $y \in Y$ das eindeutig bestimmte Element $x \in X$ mit $y = f(x)$ zuweist.

An dieser Stelle sollte man noch erwähnen, dass f^{-1} nicht durch eine Formel gegeben sein muss, selbst wenn f durch eine Formel definiert war. Des Weiteren wollen wir anmerken, dass sich allgemeiner für eine injektive Funktion $f : X \rightarrow Y$ eine Umkehrabbildung mit eingeschränktem Definitionsbereich $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ definieren lässt. In der Tat ist die Funktion $x \in X \mapsto f(x) \in f(X)$ (also „ f mit eingeschränktem Wertebereich“) bijektiv.

Definition 1.37 (Verknüpfung). Angenommen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ sind Funktionen. Dann ist die **Verknüpfung** $g \circ f : X \rightarrow Z$ (gesprochen g nach f oder g Ring f) für alle $x \in X$ durch $g \circ f(x) = g(f(x))$ definiert.

Wir bemerken, dass für eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ die Identitäten

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

erfüllt sind – eben per Konstruktion von f^{-1} (siehe auch Übung 1.42).

Beispiel 1.38 (Assoziativgesetz für Verknüpfungen). Seien $f : X_1 \rightarrow X_2$, $g : X_2 \rightarrow X_3$, $h : X_3 \rightarrow X_4$ Funktionen. Dann können wir sowohl die Funktion $h \circ (g \circ f) : X_1 \rightarrow X_4$ als auch die Funktion $(h \circ g) \circ f : X_1 \rightarrow X_4$ betrachten. Glücklicherweise sind die Klammern irrelevant, denn es gilt

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h \circ g(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$$

für alle $x \in X_1$. Deswegen schreiben wir einfach $h \circ g \circ f : X_1 \rightarrow X_4$.

Beispiel 1.39 (Verknüpfung ist nicht kommutativ). Für zwei Funktionen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ macht zwischen $g \circ f$ und $f \circ g$ im Allgemeinen nur $g \circ f$ Sinn, da f nicht auf Z definiert sein muss. Dies kann man sich mit einer Analogie aus der Informatik illustrieren. Seien zwei Programme F, G gegeben, so dass F eine Zahl als Input und eine Zeichenkette als Output hat und G eine Zeichenkette als Input und eine Zeichenkette als Output hat. In diesem Fall kann man G den Output von F als Input übergeben; umgekehrt jedoch kann man F den Output von G nicht übergeben, da F nur mit einer Zahl etwas anzufangen weiss.

Nimmt man nun an, dass $X = Y = Z$, so dass sowohl $g \circ f$ als auch $f \circ g$ Sinn machen und beide Abbildungen auf X definiert sind, dann gilt die Gleichheit $g \circ f = f \circ g$ im Allgemeinen trotzdem nicht. Wir nennen ein geometrisches Beispiel. Seien $X = Y = Z = \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung um die y -Achse und g die Verschiebung (Translation) um 1 in positiver Richtung entlang der x -Achse. Der Ursprung $(0, 0)$ wird unter $g \circ f$ auf $(1, 0)$ abgebildet und unter $f \circ g$ auf $(-1, 0)$ abgebildet, also gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Sowohl die Eigenschaften in Definition 1.33 als auch die Verknüpfung in Definition 1.37 sind so grundlegend, dass wir nicht umhin kommen, einige fundamentale Tatsachen zu beweisen:

Lemma 1.40 (Eigenschaften von Verknüpfungen). Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen.

(i) Falls f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Falls f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(iii) Falls f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis. (i): Angenommen f und g sind injektiv und $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ für Elemente $x_1, x_2 \in X$. Wegen $g \circ f(x_1) = g(f(x_1))$ und $g \circ f(x_2) = g(f(x_2))$ muss $f(x_1) = f(x_2)$ gelten, da g injektiv ist. Da f injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$ (aus $f(x_1) = f(x_2)$). Wir haben also gesehen, dass $x_1, x_2 \in X$ und $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ impliziert, dass $x_1 = x_2$. Dies bedeutet aber genau, dass $g \circ f$ injektiv ist.

(ii): Angenommen f und g sind surjektiv und $z \in Z$ ist ein beliebiges Element. Da g surjektiv ist, können wir ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$ wählen. Da auch f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ und damit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Also existiert für jedes Element $z \in Z$ ein Element $x \in X$ mit $g \circ f(x) = z$ und daher ist $g \circ f$ surjektiv.

(iii): Angenommen f und g sind bijektiv. Der erste Teil von (iii) folgt direkt, denn nach (i) ist $g \circ f$ injektiv und nach (ii) surjektiv. Wir verifizieren nun die behauptete Formel. Sei $z \in Z$.

Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(g^{-1}(z)) \in X$ ein Punkt (und damit der Punkt) ist, der unter $g \circ f$ auf z abgebildet wird. Tatsächlich erfüllen die Inversen $f^{-1} : Y \rightarrow X$ und $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ die Aussagen $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Y$ und $g(g^{-1}(z)) = z$ für alle $z \in Z$. Weswegen $f^{-1}(g^{-1}(z)) \in X$ und

$$g \circ f(f^{-1}(g^{-1}(z))) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z$$

für alle $z \in Z$ gilt. Damit ist nun auch (iii) bewiesen. \square

Mit ein wenig Übung und dem aktiven Wissen, wie denn eigentlich Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität (in Definition 1.33) definiert sind, schreibt sich obiger Beweis fast von selbst: Wenn wir zum Beispiel im Beweis von (i) zeigen wollen, dass $g \circ f$ injektiv ist, dann beginnen wir automatisch auf Grund der Definition (der zu zeigenden Aussage) mit der Annahme $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ für $x_1, x_2 \in X$. Zu diesem Zeitpunkt können wir aber nur eine einzige Annahme, nämlich die Injektivität von g verwenden, um $f(x_1) = f(x_2)$ zu erhalten. Danach haben wir eine einzige Annahme noch nicht verwendet, nämlich die Injektivität von f , und dies ist auch genau die Annahme aus der wir die gewünschte Aussage $x_1 = x_2$ schliessen können. Der Beweis von (ii) ergibt sich auf ähnliche Weise. Gewissermassen sind die Definitionen für die Begriffe in derartigen Beweise einfach gebaute Bauteile oder Schichten, die eigentlich nur auf eine Art und Weise zu einem Ganzem – dem Beweis – zusammengebaut werden können.

In der folgenden Übung kombinieren wir die Begriffe aus den Definitionen 1.33 und 1.37 ein weiteres Mal:

Wichtige Übung 1.41 (Weitere Eigenschaften von Verknüpfungen). *Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen.*

- (i) *Zeigen Sie, dass g surjektiv ist, falls $g \circ f$ surjektiv ist. Überzeugen Sie sich davon, dass in diesem Fall f nicht unbedingt surjektiv sein muss.*
- (ii) *Zeigen Sie, dass f surjektiv ist, falls $g \circ f$ surjektiv und g injektiv ist.*
- (iii) *Zeigen Sie, dass f injektiv ist, falls $g \circ f$ injektiv ist. Überzeugen Sie sich davon, dass in diesem Fall g nicht unbedingt injektiv sein muss.*
- (iv) *Zeigen Sie, dass g injektiv ist, falls $g \circ f$ injektiv ist und f surjektiv ist.*

Wichtige Übung 1.42 (Bijektivität und Existenz einer Umkehrabbildung). *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Wenn f bijektiv ist, dann gelten $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$, wie schon bemerkt wurde. Wir zeigen hier die „Umkehrung“: Angenommen es existiert eine Funktion $g : Y \rightarrow X$, so dass $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. Zeigen Sie unter Verwendung der letzten Übung, dass f bijektiv ist und dass $g = f^{-1}$ gilt. Des Weiteren, überprüfen Sie, dass $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls bijektiv ist. Was ist die Umkehrabbildung von f^{-1} ?*

Gewisse Objekte bezeichnet man als **kanonisch** oder **natürlich**, wenn sie unabhängig von jeglicher Wahl sind. Dieser Begriff drängt sich insbesondere in der Linearen Algebra auf. Wir möchten dies an einem Beispiel erläutern.

Beispiel 1.43 (Kanonische Abbildungen). Sei X eine Menge und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir betrachten injektive Abbildungen $A \rightarrow X$ und versuchen darunter eine kanonische auszumachen. Da $A \subseteq X$ eine Teilmenge ist, ist die injektive Abbildung $A \rightarrow X$, die man am schnellsten hinschreiben kann, die **Inklusionsabbildung**

$$\iota : A \rightarrow X, x \mapsto x$$

am natürlichsten. Denn wir mussten dazu weder spezifische Elemente von A noch von X wählen. Es gibt nun aber ganz viele andere injektive Abbildungen von A nach X . Diese involvieren jedoch alle eine (recht zufällige) Regel.

Wir untersuchen das konkrete Beispiel $A = \{a\}$ und $X = \{a, b, c\}$. Dann gibt es 3 verschiedene injektive Abbildungen $A \rightarrow X$. Nebst der Inklusionsabbildung (die a auf a abbildet) sind dies

- die Funktion $A \rightarrow X$ mit $a \mapsto b$ und
- die Funktion $A \rightarrow X$ mit $a \mapsto c$.

Für diese beiden Abbildungen mussten wir jedoch die Menge X kennen und spezifische Elemente von X (das wären b, c) auswählen, was bei der Inklusionsabbildung nicht der Fall war. In diesem Sinne ist die Inklusionsabbildung unter den injektiven Abbildungen $A \rightarrow X$ die natürliche, die kanonische.

Ein weiteres interessanteres Beispiel bilden die in Beispiel 1.32 definierten **kanonischen Projektionen** $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ und $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ für zwei Mengen X_1, X_2 .

Für zwei Mengen X, Y wird die **Menge aller Abbildungen** von X nach Y als Y^X geschrieben, formaler

$$Y^X = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ ist eine Funktion}\}.$$

Grund für die Notation ist unter anderem die folgende Behauptung: Falls X und Y endliche Mengen sind mit m resp. n Elementen für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so hat Y^X genau n^m Elemente (siehe auch Abschnitt 1.7).

1.4.3 Graph einer Abbildung

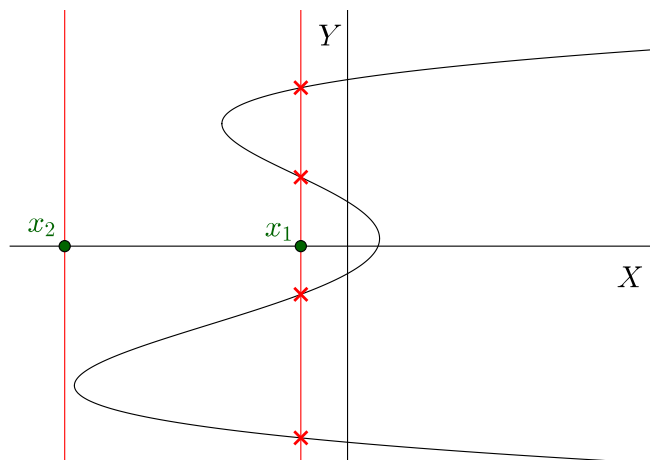
Mit Hilfe des folgenden Begriffs lässt sich der Funktionsbegriff, der in Definition 1.31 in Worten eingeführt wurde, formalisieren und auch besser visualisieren:

Definition 1.44 (Graph einer Funktion). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Der **Graph** von f ist

$$\text{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Der Graph einer Funktion enthält viel Information über die Funktion selbst. Unter anderem lässt sich aus dem Graphen bereits erkennen, ob die Funktion wohldefiniert ist (das heisst in

der Tat eine Funktion ist) oder nicht. Beispielsweise kann folgende Teilmenge von $X \times Y$ nicht der Graph einer Funktion von X nach Y sein:



Figur 1.7: Die hier dargestellte Teilmenge von $X \times Y$ ist nicht der Graph einer Funktion von X nach Y . Denn man müsste dem grün markierten Punkt x_1 in X vier verschiedene Punkte in Y zuweisen, was der Definition einer Funktion widerspricht. Genauso problematisch ist der Punkt $x_2 \in X$, dem gar kein Punkt zugewiesen wird. Standardmässig nimmt man bei der Darstellung des Graphen einer Funktion den Definitionsbereich als die Horizontale und den Wertebereich als die Vertikale.

Welche Teilmengen von $X \times Y$ Graphen einer Funktion sein können und welche nicht, wollen wir im Folgenden erklären. Wir beginnen damit, das in Figur 1.7 aufgetauchte Problem formal zu interpretieren:

Übung 1.45 (Graphen und Projektion auf den Definitionsbereich).

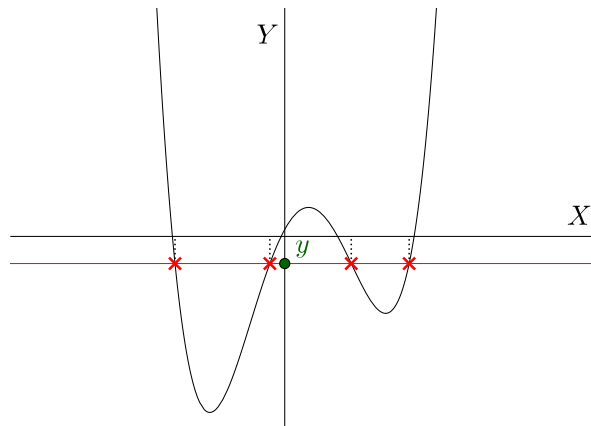
- (i) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Wie in Beispiel 1.32 bezeichnen wir mit $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ die Projektion auf X , die durch $(x, y) \mapsto x$ definiert ist und mit $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion auf Y . Zeigen Sie, dass $\pi_1|_{\text{graph}(f)} : \text{graph}(f) \rightarrow X$ bijektiv ist und finden Sie die Umkehrabbildung. Beweisen Sie des Weiteren die Identität

$$\pi_2 \circ (\pi_1|_{\text{graph}(f)})^{-1} = f,$$

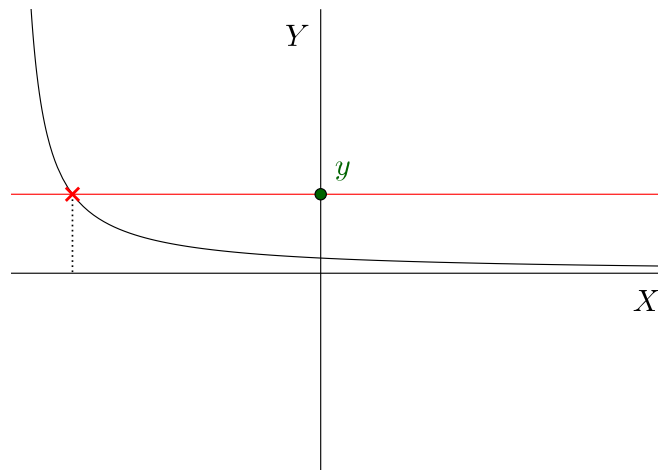
welche erklärt, wie man aus dem Graphen einer Funktion, die Funktion zurückerhalten kann.

- (ii) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $\Gamma \subseteq X \times Y$ genau dann ein Graph einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist, wenn $\pi_1|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow X$ bijektiv ist. Verifizieren Sie auch, dass in diesem Fall f eindeutig bestimmt ist.

Auch die Eigenschaften aus Definition 1.33 lassen sich im Graphen erkennen. Unter anderem ist ersichtlich, ob eine Funktion injektiv ist oder nicht:

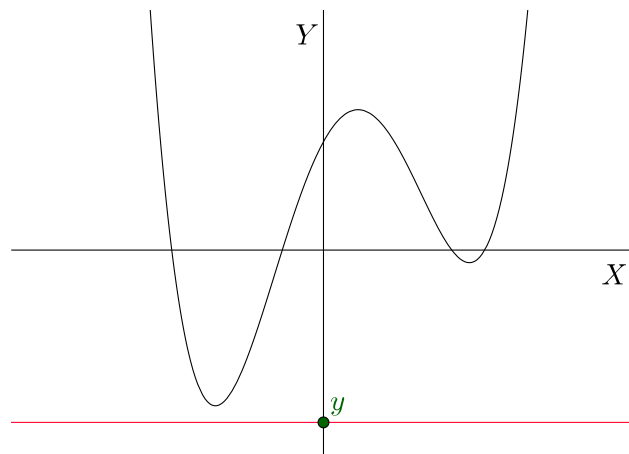


Figur 1.8: Dies ist der Graph einer nicht injektiven Funktion. Der grün markierte Punkt y in Y wird unter der Funktion von vier verschiedenen Elementen in X angenommen.

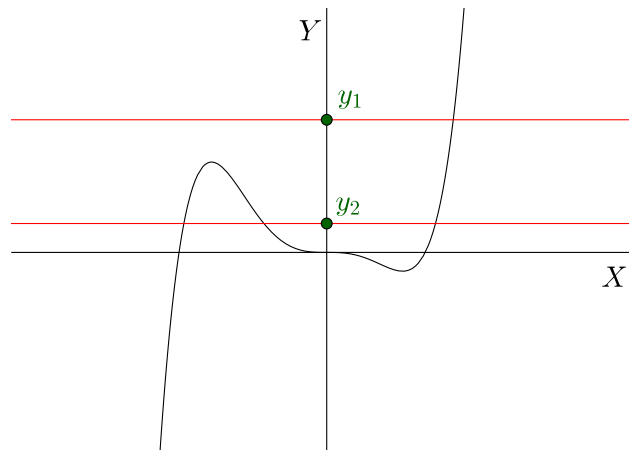


Figur 1.9: Dies ist der Graph einer injektiven Funktion. Der grün markierte Punkt $y \in Y$ ist das Bild von nur einem Punkt in X . Dies ist immer noch der Fall, wenn y verschoben wird (bis auf die Tatsache, dass y dann vielleicht gar nicht mehr im Bild liegt). In anderen Worten: jede horizontale Linie schneidet den Graphen in höchstens einem Punkt.

Genauso lässt sich beurteilen, ob eine Funktion surjektiv ist oder nicht - siehe Figuren 1.10 und 1.11. Wir formalisieren dies in Übung 1.47.



Figur 1.10: Dies ist der Graph einer nicht-surjektiven Funktion. Der grün markierte Punkt y in Y wird unter der Funktion von keinem Element in X angenommen.



Figur 1.11: Dies ist der Graph einer surjektiven Funktion. Jede horizontale Linie (wie zum Beispiel jene durch y_1 oder y_2) schneidet den Graphen in mindestens einem Punkt.

Applet 1.46 (Einschränkungen einer Funktion). Wir betrachten eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I in \mathbb{R} definiert ist. Durch Einschränken der Funktion auf Teilintervalle $[a, b] \subseteq I$ des Definitionsbereichs oder durch Einschränken des Wertebereichs auf ein Intervall $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ können wir mitunter Injektivität, Surjektivität, oder auch Bijektivität der neuen Funktion erreichen.

Wichtige Übung 1.47 (Eigenschaften des Graphen unter Projektion auf den Wertebereich). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion.

- Zeigen Sie, dass f injektiv ist genau dann, wenn $\pi_2|_{\text{graph}(f)}$ injektiv ist.
- Zeigen Sie, dass f surjektiv ist genau dann, wenn $\pi_2|_{\text{graph}(f)}$ surjektiv ist. Intuitiv bedeutet letzteres, dass die Projektion des Graphen $\text{graph}(f)$ auf Y jedes Element erreicht.
- Angenommen f ist bijektiv. Wie findet man den Graphen von f^{-1} ?

1.4.4 Bild- und Urbildmengen

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir verwenden manchmal auch die Notation $\{f(x) \mid x \in A\}$ für das Bild $f(A)$ der Teilmenge A wie in Definition 1.31. Ebenso schreiben wir auch

$$\{f(x) \mid x \in X \wedge A(x)\} = \{y \mid y \in Y \wedge \exists x \in X : (f(x) = y \wedge A(x))\},$$

wobei $A(x)$ irgend eine Aussage über Elemente x von X sein kann. In dieser Gleichung haben wir rechts genau nach dem Schema in der dritten Annahme an die Mengenlehre (siehe Abschnitt 1.4.1) eine Menge definiert und verwenden dies, um den kürzeren (und übersichtlicheren) Ausdruck links zu definieren.

Folgende Definition der Urbildmengen ist auch für nicht bijektive Funktionen nützlich:

Definition 1.48 (Urbilder bezüglich einer Funktion). Für eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ und eine Teilmenge $B \subseteq Y$ definieren wir das **Urbild** $f^{-1}(B)$ von B unter f als

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Beispielsweise gilt für eine Funktion $f : X \rightarrow Y$, dass $f^{-1}(\{\}) = \{\}$ und $f^{-1}(Y) = X$. In der nächsten Übung prüfen wir einige Eigenschaften von Bildmengen und Urbildmengen.

Wichtige Übung 1.49 (Verhalten von Bildern und Urbildern unter Mengenoperationen). Gegeben sei eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ und Teilmengen $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$.

(i) Zeigen Sie, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

(ii) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

(iii) Zeigen Sie die Gleichungen

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \quad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').$$

(iv) Zeigen Sie, dass $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ und dass Gleichheit gilt, wenn f injektiv ist. Verifizieren Sie, dass in diesem Fall auch $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$ gilt.

(v) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ und $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ gelten.

(vi) Verallgemeinern Sie die Regeln $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ und $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ für beliebige Vereinigungen resp. Schnitte.

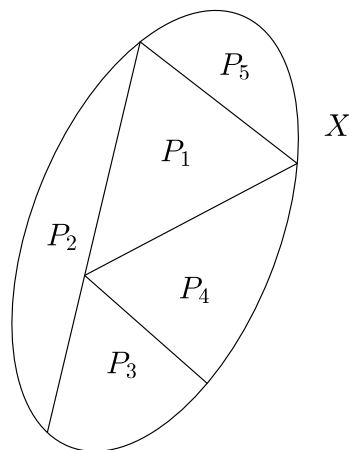
Zusammenfassend sollten Sie sich merken, dass die Urbildoperation mit allen von uns besprochenen mengentheoretischen Operationen (unter anderem Vereinigung, Durchschnitt und Komplement) verträglich ist, während dies die Bildoperation nur für die Vereinigung oder unter gewissen Bedingungen erfüllt.

Applet 1.50 (Bilder und Urbilder). Wir betrachten eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einem Intervall I in \mathbb{R} definiert ist. Je nach Einstellung des Applets wird entweder das Bild $f(A)$ eines Teilintervalls $A = [x_1, x_2] \subseteq I$ oder das Urbild $f^{-1}([y_1, y_2])$ eines Intervalls $[y_1, y_2] \subseteq \mathbb{R}$ dargestellt.

1.4.5 Partitionen

Der folgende Begriff kann für die Definition von Funktionen durch „Fallunterscheidung“ nützlich sein.

Definition 1.51 (Partition). Sei X eine Menge und \mathcal{P} eine Familie von nicht-leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von X , so dass $X = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} P$. Dann wird \mathcal{P} eine **Partition** von X genannt.



Figur 1.12: Schematische Darstellung einer Partition $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_5\}$ einer Menge X .

Folgendes Lemma beschreibt, unter welchen Bedingungen man eine Funktion aus Funktionen auf Teilmengen „zusammensetzen“ kann:

Lemma 1.52 (Funktionen durch Fallunterscheidungen). Seien X und Y Mengen und sei \mathcal{P} eine Partition von X . Angenommen es ist für jedes $P \in \mathcal{P}$ eine Funktion $f_P : P \rightarrow Y$ gegeben. Dann existiert eine eindeutige Funktion $f : X \rightarrow Y$, so dass $f|_P = f_P$ für jedes $P \in \mathcal{P}$ gilt.

Beweis. Wir definieren die gewünschte Funktion $f : X \rightarrow Y$ wie folgt: Sei $x \in X$. Dann existiert genau ein $P \in \mathcal{P}$ mit $x \in P$, da \mathcal{P} eine Partition ist. Wir setzen nun $f(x) = f_P(x)$ und haben also eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ definiert. Diese erfüllt $f|_P = f_P$ nach Konstruktion.

Wir zeigen noch die Eindeutigkeit von f . Sei also $g : X \rightarrow Y$ eine weitere Funktion mit $g|_P = f_P$ für alle $P \in \mathcal{P}$. Sei $x \in X$ ein beliebiges Element und $P \in \mathcal{P}$ das Partitionselement mit $x \in P$. Dann gilt

$$g(x) = g|_P(x) = f_P(x) = f(x).$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir $g = f$. □

Übung 1.53 (Funktionen durch Fallunterscheidungen). Zeigen Sie, dass die Bedingung in Lemma 1.52, dass \mathcal{P} eine Partition ist, notwendig ist, durch Auffinden geeigneter Beispiele:

- Finden Sie Mengen X, Y , eine Kollektion \mathcal{P} nicht paarweise disjunkter Teilmengen mit $X = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$ und Funktionen $f_P : P \rightarrow Y$ für jedes $P \in \mathcal{P}$, so dass keine Funktion $f : X \rightarrow Y$ mit $f|_P = f_P$ für jedes $P \in \mathcal{P}$ existiert.
- Seien X und Y Mengen, \mathcal{P} eine Kollektion paarweise disjunkter Teilmengen mit $X \neq \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$ und Funktionen $f_P : P \rightarrow Y$ für jedes $P \in \mathcal{P}$ gegeben. Zeigen Sie, dass mehrere Funktionen $f : X \rightarrow Y$ mit $f|_P = f_P$ für jedes $P \in \mathcal{P}$ existieren, falls Y mehr als ein Element enthält.

1.4.6 Iterationen

Eine Funktion, für die Wertebereich gleich dem Definitionsbereich ist, lässt sich auch mit sich selbst verknüpfen.

Definition 1.54 (Iterationen einer Funktion). Sei $f : X \rightarrow X$ eine Funktion von einer Menge X auf sich selbst. Wir definieren die **Iterationen der Funktion f** durch

$$f^{\circ 1} = f : X \rightarrow X, \quad f^{\circ 2} = f \circ f : X \rightarrow X, \quad f^{\circ 3} = f \circ f \circ f : X \rightarrow X$$

und rekursiv auch

$$f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n} : X \rightarrow X$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. Wir sprechen $f^{\circ n}$ auch als „ f hoch n “ aus und setzen des Weiteren $f^{\circ 0} = \text{id}_X$.

Wir bemerken, dass man die Iteration einer Funktion $f : X \rightarrow X$ oft einfach auch durch $f^n = f^{\circ n}$ bezeichnet.²

Übung 1.55 (Beispiele und eine Eigenschaft von Iterationen).

- Sei $X = \{a, b, c\}$ eine Menge mit 3 verschiedenen Elementen und $f : X \rightarrow X$ die Funktion definiert durch $f(a) = b$, $f(b) = c$ und $f(c) = a$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. Beschreiben Sie die Umkehrabbildung und alle Iterationen von f explizit.
- Iterieren Sie die Funktion $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow 3x \in \mathbb{R}$ und beschreiben Sie intuitiv, wie sich $f^{\circ n}(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und verschiedene $n \in \mathbb{N}$ verhält.
- Iterieren Sie die Funktion $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ und beschreiben Sie intuitiv, wie sich $f^{\circ n}(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und verschiedene $n \in \mathbb{N}$ verhält.
- Sei X eine Menge und $f : X \rightarrow X$ eine Transformation auf X . Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{\circ m} \circ f^{\circ n} = f^{\circ(m+n)}$.

²Wir wollen zumindest anfangs die Notation $f^{\circ n}$ verwenden, um Verwirrungen mit der n -ten Potenz einer reellwertigen Funktion zu vermeiden.

1.4.7 Das Hilbert Hotel

Für eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf einer endlichen Menge X sind Injektivität und Surjektivität äquivalent (siehe Abschnitt 1.7). Für unendliche Mengen ergeben sich jedoch weitere Möglichkeiten, die auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen könnten.

Beispiel 1.56 (Hilbert Hotel). *Die Abbildung*

$$f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 1 \in \mathbb{N}$$

ist zwar injektiv aber nicht surjektiv, denn $1 \notin f(\mathbb{N})$. Dies kann man sich zur Veranschaulichung wie folgt vorstellen: Angenommen ein Hotel (das sogenannte **Hilbert Hotel**) ist voll belegt und hat für jede natürliche Zahl n ein Hotelzimmer mit der Türnummer n (entlang eines wirklich sehr langen Ganges der Reihe nach nummeriert). Dann kann man trotzdem noch einen Gast unterbringen. Dazu muss die Rezeption bloss dem Gast im ersten Zimmer einen Brief mit folgender Botschaft aushändigen:

„Wir bedauern, Ihnen mitzuteilen, dass wir Ihnen ein neues Zimmer zuweisen müssen. Bitte packen Sie ihre Sachen, übergeben Sie diesen Brief dem Gast im nächsten Zimmer und übernehmen Sie dieses Zimmer, sobald es frei ist.“

Daraufhin wird das erste Zimmer frei sein, wo dann der neue Gast untergebracht werden kann. Ebenso bekommen alle alten Gäste jeweils ein neues Zimmer.

Genauso gibt es auch surjektive Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die nicht injektiv sind, zum Beispiel

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ n - 1 & \text{falls } n \neq 1 \end{cases}.$$

Das Gedankenspiel von Hilberts Hotel lässt sich durchaus erweitern. Wir verweisen dazu auf die nächste Übung und diesen [Kurzfilm](#), der folgende Übung auflöst und erweitert.

Übung 1.57 (Hilberts Bus). Wir setzen das Gedankenspiel von Hilberts Hotel fort: Stellen Sie sich vor, dass ein sehr langer, voll besetzter Bus mit Gästen vor Hilberts vollem Hotel auffährt, der für jede natürliche Zahl einen entsprechend nummerierten Sitzplatz aufweist. Wie können Sie die neuen Gäste alle im Hotel unterbringen? Welche Abbildung $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ können Sie verwenden, um im Hotel Platz zu beschaffen?