D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 1

Aufgabe 3 stammt aus dem Skript von Dr. Menny Akka Ginosar zu Fibonnacci-Folgen. Dieses Skript finden Sie auf der Kurswebsite.

1. Der Goldene Schnitt Teil 1. In der Vorlesung haben wir $\mathcal{F}_{0,1}$ berechnet, schauen Sie sich diese Berechnung nochmals an. Dann:

(a) Geben Sie eine Formel für $\mathcal{F}_{1,0}$ an.

(b) Bestimmen Sie eine Formel für $\mathcal{F}_{a,b}$, welche nur von a, b und n abhängt.

Lösung:

(a) Diese Aufgabe kann auf verschiedene Weisen gelöst werden. Eine Möglichkeit ist es, die Gleichung

$$a \cdot \mathcal{G}_\varphi + b \cdot \mathcal{G}_\psi = \mathcal{F}_{1,0}$$

aufzustellen und das entsprechende lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a\varphi + +b\psi = 0 \end{cases}$$

zu lösen. Man erhält

$$a = \frac{\psi}{\psi - \varphi}, \qquad b = \frac{\varphi}{\varphi - \psi}.$$

Wir verwenden die Notation der Vorlesung, sodass $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gilt.

Eine andere Art, um die Aufgaben zu lösen, ist es zu realisieren, dass wir $\mathcal{F}_{1,0}$ aus $\mathcal{F}_{0,1}$ erhalten, indem wir eine 1 an den Anfang setzen und jeden Index um $+1$ verändern. Diese Aussage ist wahr, weil jede Folge in **Fib** durch ihre ersten beiden Folgenglieder eindeutig bestimmt ist. Deswegen ist das i-te Element von $\mathcal{F}_{0,1}$ das $i+1$-ste Element von $\mathcal{F}_{1,0}$.

In beiden Fällen erhalten wir für $\mathcal{F}_{1,0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ die Gleichung

$$a_n = \frac{\psi}{\psi - \varphi}\varphi^n + \frac{\varphi}{\varphi - \psi}\psi^n = \frac{\varphi\psi^n - \psi\varphi^n}{\varphi - \psi}.$$

(b) Aus den Formeln für $\mathcal{F}_{1,0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ und $\mathcal{F}_{0,1} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$, und der Identität $\mathcal{F}_{a,b} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ folgt

$$c_n = a \cdot a_n + b \cdot b_n = a \cdot \frac{\varphi\psi^n - \psi\varphi^n}{\varphi - \psi} + b \cdot \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}.$$

2. Negation und De Morgan.

(a) Seien A und B Aussagen. Beweisen Sie

(i) A ist äquivalent zu $\neg(\neg A)$;

(ii) $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $\neg A \wedge \neg B$;

(iii) $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent zu $\neg A \vee \neg B$.

(b) Jetzt seinen A und B Mengen in einer größeren Menge U. Beweisen Sie

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Lösung:

(a) (i)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
w	f	w
f	w	f

(ii)

$\neg(A \vee B)$		B	
		w	f
A	w	f	f
	f	f	w

$\neg A \wedge \neg B$		B	
		w	f
A	w	f	f
	f	f	w

(iii)

$\neg(A \wedge B)$		B	
		w	f
A	w	f	w
	f	w	w

$\neg A \vee \neg B$		B	
		w	f
A	w	f	w
	f	w	w

(b) Um sich die Aussagen besser vorzustellen, kann es sich lohnen Skizzen anzufertigen.

(i)

$(A \cup B)^c$		B	
		$\in$	$\notin$
A	$\in$	$\notin$	$\notin$
	$\notin$	$\notin$	$\in$

$A^c \cap B^c$		B	
		$\in$	$\notin$
A	$\in$	$\notin$	$\notin$
	$\notin$	$\notin$	$\in$

Mit Hilfe der Logik könnte man dies wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= \{x \in U \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\} \\
&= \{x \in U \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \in U \mid x \notin A \wedge x \notin B\} \\
&= \{x \in U \mid x \notin A\} \cap \{x \in U \mid x \notin B\} \\
&= A^c \cap B^c.
\end{aligned}$$

(ii)

$(A \cap B)^c$		B	
		$\in$	$\notin$
A	$\in$	$\notin$	$\in$
	$\notin$	$\in$	$\in$

$A^c \cup B^c$		B	
		$\in$	$\notin$
A	$\in$	$\notin$	$\in$
	$\notin$	$\in$	$\in$

3. Der Goldene Schnitt, Teil 2. Wir wollen normalerweise abgesehen von der Fertigkeit algebraische Manipulationen richtig durchzuführen nicht auf Ihr Schulwissen zurückgreifen. Wir machen in dieser Aufgabe zu dem Vorschau eine Ausnahme.
Sei $\mathcal{F}_{0,1} = (F_0, F_1, F_2, \dots) \in \mathbf{Fib}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass dieser Grenzwert existiert und ungleich 0 ist.
Lösung: Durch einsetzen der rekursiven Formel, welche F_n definiert, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Sei $X := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$. Aus der obigen Rechnung erhalten wir, dass X der folgenden Gleichung entsprechen muss

$$X = 1 + \frac{1}{X}.$$

Da X nicht gleich 0 ist und wir dies ohne Beweis annehmen dürfen, folgern wir, dass $X^2 - X - 1 = 0$ gilt. Daraus folgt, dass X eintweder φ oder ψ ist. Da alle Folgenglieder positiv sind, muss es auch ihr Grenzwert sein. Deswegen ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi.$$

4. Logik. Seien x, y, z Variablen und R, S Relationen. Vereinfachen Sie die folgende Aussage, indem Sie die Negationsklammer auflösen:

$$\neg\big(\forall x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge R(z,x)) \vee (R(x,y) \wedge S(z,x))\big)$$

Lösung: Die Aussage lässt sich vereinfachen zu

$$\neg\big(\forall x \exists y \exists z R(x,y) \wedge (R(z,x) \vee S(z,x))\big).$$

Das Auflösen der Negationsklammer liefert

$$\exists x \forall y \forall z \neg R(x,y) \vee (\neg R(z,x) \wedge \neg S(z,x)).$$

5. Logik. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Bilden Sie die Kontraposition der folgenden Aussage:

$$x \neq y \implies (\exists \varepsilon > 0 : |x-y| > \varepsilon)$$

Lösung: Die Kontraposition ist

$$(\forall \varepsilon > 0 : |x-y| \leqslant \varepsilon) \implies x = y.$$

6. Dimension. Seien $\mathcal{F} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ und $\mathcal{G} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$ zwei Fibonacci-Folgen. Die Folgen sind Ihnen nicht bekannt, aber für jede natürliche Zahl i können Sie überprüfen, ob $\alpha_i = \beta_i$ ist. Dies können Sie so oft tun wie Sie wollen, nachdem eine Zahl ausgewählt wurde, kann sie allerdings nicht erneut ausgewählt werden.
Behauptung: Zwei **zufällige** Überprüfungen reichen aus um zu überprüfen, ob $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ ist. Erklären Sie warum.
Lösung: Tatsächlich reichen zwei zufällige Überprüfungen aus. Wenn eine Überprüfung die Ungleichheit der Elemente zurückliefert, sind die Folgen logischerweise nicht gleich. Jetzt nehmen wir an, dass beide Überprüfungen die Gleichheit der Elemente ergeben. Zuerst schreiben wir $\mathcal{F}_{0,1}^{(i)}$ für das i-te Element von $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}^{(i)}$ für das i-te Element von $\mathcal{F}_{1,0}$.
Aus der Vorlesung wissen wir um die Existenz von $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= a \cdot \mathcal{F}_{1,0} + b \cdot \mathcal{F}_{0,1}, \\ \mathcal{G} &= a' \cdot \mathcal{F}_{1,0} + b' \cdot \mathcal{F}_{0,1}. \end{aligned}$$

Unsere beiden Überprüfungen bedeuten, dass natürliche Zahlen i und j existieren, sodass

$$\begin{cases} a \cdot \mathcal{F}_{1,0}^{(i)} + b \cdot \mathcal{F}_{0,1}^{(i)} = \alpha_i = \beta_i = a' \cdot \mathcal{F}_{1,0}^{(i)} + b' \cdot \mathcal{F}_{0,1}^{(i)} \\ a \cdot \mathcal{F}_{1,0}^{(j)} + b \cdot \mathcal{F}_{0,1}^{(j)} = \alpha_j = \beta_j = a' \cdot \mathcal{F}_{1,0}^{(j)} + b' \cdot \mathcal{F}_{0,1}^{(j)} \end{cases}$$

Das impliziert aber schon

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

und deswegen erhalten wir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{a,b} = \mathcal{F}_{a',b'} = \mathcal{G}$.

Alternative solution from Segev: Let $\mathcal{F} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ and let $\mathcal{G} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$ be the two elements of **Fib** we want to compare. Their difference $\mathcal{F} - \mathcal{G}$ is also in **Fib**. Let us denote its elements by $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ We will compare α_i to β_i and α_j to β_j for some i, j (if $j > i$, just invert the roles of i and j). If $\alpha_i = \beta_i$, we must have (everything in the following sequence is computed from γ_i, so you should read it forward and backward from there)

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= (-1)^{i+1}F_i\gamma_{i+1}\\
&\vdots\\
\gamma_{i-\ell} &= (-1)^{\ell+1}F_\ell\gamma_{i+1}\\
&\vdots\\
\gamma_{i-3} &= \gamma_{i-1}-\gamma_{i-2} = 2\gamma_{i+1}\\
\gamma_{i-2} &= \gamma_i-\gamma_{i-1} = -\gamma_{i+1}\\
\gamma_{i-1} &= \gamma_{i+1}-\gamma_i = \gamma_{i+1}\\
\gamma_i &= 0\\
\gamma_{i+1}&\\
\gamma_{i+2} &= \gamma_{i+1}\\
\gamma_{i+3} &= 2\gamma_{i+1}\\
\gamma_{i+4} &= 3\gamma_{i+1}\\
&\vdots\\
\gamma_{i+k} &= F_k\gamma_{i+1}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

where we denoted $\mathcal{F}_{0,1} = (F_0, F_1, F_2, \dots)$. If now $\alpha_j = \beta_j$, we have

$$0 = \alpha_j - \beta_j = \gamma_j = F_{j-i}\gamma_{i+1}.$$

Therefore $\gamma_{i+1} = 0$, which implies $\gamma_k = 0$ for all $k \geqslant 0$ by the formulae written above.