D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler

Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 2

Aufgaben 2, 3 und 6 sind Professor Einsiedlers Analysisskript entnommen. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bezeichnen auf diesem Übungsblatt alle ganzen Zahlen grössergleich 1.

1. **Logik.** Formulieren Sie die Aussage "es gibt keine grösste natürliche Zahl" und die Aussage "für jede natürliche Zahl n gibt es eine strikt grössere natürliche Zahl" in Prädikatenlogik. Zeigen Sie durch Umformung in Prädikatenlogik die Äquivalenz beider Aussagen.

   Lösung: „Es gibt keine grösste natürliche Zahl" heisst in Formelsprache

$$\neg(\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \geqslant n).$$

   „Für jede natürliche Zahl n gibt es eine strikt grössere natürliche Zahl" heisst

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > m.$$

   Die Äquivalenz dieser Aussagen ergibt sich aus den Umformungen

$$\begin{aligned} & \neg(\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \geqslant n) \\ \iff\ & \forall m \in \mathbb{N} : \neg(\forall n \in \mathbb{N} : m \geqslant n) \\ \iff\ & \forall m \in \mathbb{N} : \exists\ n \in \mathbb{N} : \neg(m \geqslant n) \\ \iff\ & \forall m \in \mathbb{N} : \exists\ n \in \mathbb{N} : n > m. \end{aligned}$$

2. **Archimedisches Prinzip.** Was ist die Menge

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \right\}$$

   wobei n über alle natürlichen Zahlen läuft?

   Solution: Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > 1/x$ ist. Also ist $\frac{1}{N} < x$. Es folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid x \leqslant 1/n\} = \varnothing.$$

   Genauso existier für $\in \mathbb{R}_{<0}$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $-N < x$ und deswegen auch $-1/N > x$ gilt. Daraus folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}_{<0} \mid x \geqslant -1/n\} = \varnothing.$$

Zusammen folgern wir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \right\} = \{0\}.$$

3. **Kartesisches Produkt.** Seien X, Y Mengen und A, A' Teilmengen von X. Des Weiteren seien B, B' Teilmengen von Y. Zeigen Sie die Formel

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Überzeugen Sie sich (z.B. durch ein Bild) auch davon, dass es keine ähnliche Formel für die Vereinigung gibt.

Solution: Wir zeigen zuerst, dass die linke Menge in der Rechten enthalten ist:

$$\begin{aligned} &(x, y) \in (A \times B) \cap (A' \times B') \\ \Longrightarrow\ &x \in A \cap A' \text{ and } y \in B \cap B' \\ \Longrightarrow\ &(x, y) \in (A \cap A') \times (B \cap B'). \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir die andere Inklusion:

$$\begin{aligned} &(x, y) \in (A \cap A') \times (B \cap B') \\ \Longrightarrow\ &x \in (A \cap A') \text{ and } y \in (B \cap B') \\ \Longrightarrow\ &(x, y) \in A \times B \text{ and } (x, y) \in A' \times B' \\ \Longrightarrow\ &(x, y) \in (A \times B) \cap (A' \times B'). \end{aligned}$$

4. **Abbildungen und Mengen.** Sei

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{array}$$

für ein $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und für $b \in \mathbb{R}$. Zeichne die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant f(x)\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$$

(a) für $a = 2$, $b = 1$;

(b) für $a = -2$, $b = 1$.

Solution:

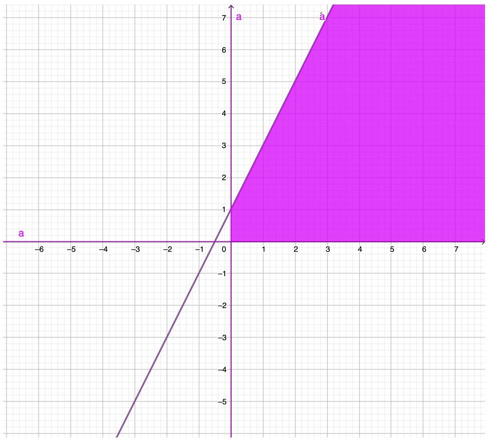

Abbildung 1: Aufgabe 4.a)

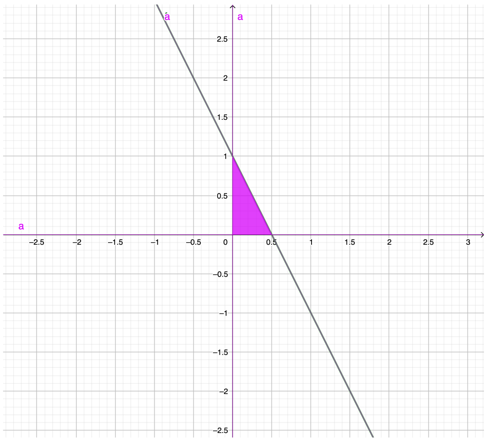

Abbildung 2: Exercise 4.b)

5. **Inverse.**

   (a) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nehme an es existieren Abbildungen $g_1 : Y \to X$ and $g_2 : Y \to X$ mit

   $$g_1 \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{and} \quad f \circ g_2 = \mathrm{id}_Y\,.$$

   Zeige dann, dass $g_1 = g_2 = f^{-1}$ gilt, und dass f bijektiv ist.

   Solution: Es gilt

   $$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2.$$

   Also ist $g_1 = g_2 = f^{-1}$. Des Weiteren folgt aus $f \circ g_2 = \mathrm{id}_Y$, dass f surjektiv ist. Ausserdem ist f injektiv, da $g_1 \circ f = \mathrm{id}_X$ ist.

   (b) Nennen Sie ein Beispiel für eine Funktion, die eine Rechtsinverse hat, aber nicht bijektiv ist. Mit der rechten Inverse ist gemeint, dass, wenn f eine Funktion von X nach Y ist, eine Funktion g von Y nach X existiert, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

   Solution: Betrachte die Funktionen

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

   und

   $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_{\geqslant 0} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

   Dann gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{R_{\geqslant 0}}$, also ist g eine Rechtsinverse von f. Allerdings gilt $f(-1) = 1 = f(1)$, weswegen f nicht injektiv und insbesondere nicht bijektiv ist.

6. **Abbildungen und Operationen auf Mengen.** Gegeben sei eine Funktion $f : X \to Y$ und Teilmengen $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

   (b) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ gilt. Unter welcher Bedingung an f gilt auf jeden Fall Gleichheit?

   (c) Beweisen Sie die Gleichungen

   $$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \qquad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').$$

   (d) Zeigen Sie, dass $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ und dass Gleichheit gilt, wenn f injektiv ist. Verifizieren Sie, dass in diesem Fall auch $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$ gilt.

   (e) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ und $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ gelten.

Zusammenfassend sollten Sie sich merken, dass die Urbildoperation mit allen von uns besprochenen mengentheoretischen Operationen (unter anderem Vereinigung, Durchschnitt und Komplement) verträglich ist, während dies die Bildoperation nur für die Vereinigung oder unter gewissen Bedingungen erfüllt.

Solution:

(a) Sei $y \in f(f^{-1}(B))$. Per Definition gilt

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Da ein $x \in f^{-1}(B)$ existiert, sodass $y = f(x)$ ist, muss $y \in B$ sein, was eine Inklusion zeigt. Gleichheit gilt, wenn f surjektiv ist. Um genau zu sein impliziert $y \in B$ and die Surjektivität von f, dass $x \in X$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt und x in $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Dann ist $y \in f(f^{-1}(B))$.

(b) Per Definition ist

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}.$$

Jedes $x \in A$ ist auch in $f^{-1}(f(A))$ enthalten, da $f(x) \in f(A)$ gilt. Wenn f injektiv ist, gilt die Gleichheit. Tatsächlich impliziert $x \in f^{-1}(f(A))$, dass das Bild von x mit dem Bild eines Elements $x' \in A$ übereinstimmt. Wenn f also injektiv ist, muss $x = x'$ gelten.

(c)
- Sei $y \in f(A \cup A')$. Dann ist y das Bild unter f von einem $x \in A \cup A'$, d.h. $f(x) = y$ Wenn $x \in A$ ist, dann ist $y = f(x) \in f(A)$ und wenn $x \in A'$ ist, dann ist $y \in f(A')$. Deswegen gilt auch $y \in f(A) \cup f(A')$. Dies beweist die Inklusion $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$.

Um die andere Inklusion zu zeigen, betrachte $y \in f(A) \cup f(A')$. Wenn $y \in f(A)$ ist, dann folgt $y \in f(A \cup A')$, weil $A \subseteq A \cup A'$ gilt. Genauso gilt, wenn $y \in f(A')$ ist, $y \in f(A \cup A')$. Dies beweist, dass $y \in f(A) \cup f(A') \implies f(A \cup A')$ ist.

- Wir zeigen zuerst, dass die linke in der Rechten Menge enthalten ist. Sei $x \in f^{-1}(B \cup B')$. Per Definition gilt $y := f(x) \in B \cup B'$. Wenn $y \in B$ ist, dann muss $x \in f^{-1}(B)$ sein und wenn $y \in B'$ ist, so gilt $x \in f^{-1}(B')$. Zusammen folgt $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
  Um die andere Inklusion zu zeigen, betrachte $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. Wenn $x \in f^{-1}(B)$ ist, dann gilt $y := f(x) \in B$. Falls $x \in f^{-1}(B')$ ist, dann gilt $y \in B'$. Zusammen erhalten wir $y \in B \cup B'$, was $x \in f^{-1}(B \cup B')$ impliziert.

(d) Sei $y \in f(A \cap A')$. Dann existiert ein $x \in A \cap A'$, sodass $y = f(x)$ gilt. Weil $x \in A \cap A' \subseteq A$ ist, erhalten wir $y \in f(A)$. Genauso folgt $y \in f(A')$. Deswegen ist $y \in f(A) \cap f(A')$. Nehme nun an, dass f injektiv ist und sei $y \in f(A) \cap f(A')$. Dann existieren $x \in A$ und $x' \in A'$, sodass $f(x) = y = f(x')$. Weil f injektiv ist, muss $x = x' \in A \cap A'$ sein und deswegen ist $y \in f(A \cap A')$.

Um den zweiten Teil der Aufgabe zu bearbeiten, bemerke zunächst, dass $A \smallsetminus A' = A \cap (A')^c$ ist. Deswegen erhalten wir $f(A \smallsetminus A') \subseteq f(A) \cap f((A')^c)$. Für $y \in f(A) \cap f((A')^c)$ ist sein eindeutiges Urbild x in $A \cap (A')^c$ enthalten. Also gilt $y \notin f(A')$ und $y \in f(A)$, d.h. $y \in f(A) \cap f(A')^c$. Auf der anderen Seite ist für $y \in f(A) \cap f(A')^c$ sein eindeutiges Bild in A und nicht in A' enthalten. Deswegen gilt $y \in f(A) \cap f((A')^c)$. Zusammen folgt, dass $f(A) \cap f((A')^c) = f(A) \cap f(A')^c$ gilt, falls f injektiv ist, und damit sind wir fertig.

(e) Sei $x \in f^{-1}(B \cap B')$. Dann ist $y := f(x) \in B \cap B'$. Also sind $x \in f^{-1}(B)$ und $x \in f^{-1}(B')$. Für die andere Inklusion betrachte $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$. Dann ist das Bild von x in B und in B' enthalten, d.h. $x \in f^{-1}(B \cap B')$.

Sei $x \in f^{-1}(Y \smallsetminus B)$. Dann ist das Bild $y = f(x)$ von x in $Y \smallsetminus B$ enthalten, was impliziert, dass x nicht im Urbild von B ist. In anderen Worten gilt $x \in X \smallsetminus f^{-1}(B)$. Sei nun andererseits $x \in X \smallsetminus f^{-1}(B)$. Then the image of Dann wird x von f nicht auf B abgebildet. Deswegen gilt $x \in f^{-1}(Y \smallsetminus B)$.
Alternative solution: We have

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(B \cap B') &= \{x \in X \mid f(x) \in B \cap B'\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) \in B \wedge f(x) \in B'\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \cap \{x \in X \mid f(x) \in B'\} \\
&= f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').
\end{aligned}
$$

Additionally,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Y \setminus B) &= \{x \in X \mid f(x) \in (Y \setminus B)\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) \in Y \wedge f(x) \notin B\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) \in Y\} \cap \{x \in X \mid f(x) \notin B\} \\
&= X \cap \{x \in X \mid f(x) \notin B\}.
\end{aligned}$$

On the other hand, since $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$$\begin{aligned}
X \setminus f^{-1}(B) &= \{x \in X \mid x \notin f^{-1}(B)\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) \notin B\}.
\end{aligned}$$

This equals the last term of the previous string of equality and hence proves the statement.