Musterlösung Serie 3

1. **Lineare Gleichungen.** Benutze das Gaußsche Eliminationsverfahren, um alle Lösungen des folgenden System linearer Gleichungen über $\mathbb{R}$ zu finden:

$$\begin{cases} x+2y+2z+w & = & -1 \\ 3x+6y+2z+5w & = & 1 \end{cases}$$

Solution: Das lineare System entspricht der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Wir vereinfachen, indem wir Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 \end{array}\right)$$

Dadurch erhalten wir das äquivalente System:

$$\begin{cases} x+2y+2z+w & = & -1 \\ z-\frac{1}{2}w & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1-2y-2w \\ z & = & \frac{1}{2}w-1 \end{cases}$$

Also ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 1-2b-2d,\ y=b,\ z=\frac{1}{2}d-1,\ w=d,\ b,d \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. **Körper.** Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Seine Elemente sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, wobei jeweils $\overline{n}$ die Restklasse von n modulo $5\mathbb{Z}$ bedeutet. Berechne:

   (a) alle Lösungen (x,y) der Gleichung $x+y=\overline{0}$;

   (b) den Wert von $\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}}$ als ein Element von $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$;

   (c) den Wert von $\overline{4}^{2022}$.

Solution:

   (a) Die Gleichung $x+y=\overline{0}$ ist äquivalent zu der Gleichung $y=\overline{0}-x=-x$. Für $x=\overline{a}$ mit $0 \leqslant a \leqslant 4$ gilt ausserdem $-x=\overline{-a}=\overline{5-a}$. Somit ist die Menge der Lösungen

$$\{(x,-x) \mid x \in \mathbb{F}_5\} = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{4}), (\overline{2},\overline{3}), (\overline{3},\overline{2}), (\overline{4},\overline{1})\}.$$

(b) Aus den Rechnungen

$$\begin{array}{rcccl} \overline{4}\cdot\overline{4} & = & \overline{16} & = & \overline{1}, \\ \overline{3}\cdot\overline{2} & = & \overline{6} & = & \overline{1} \end{array}$$

folgt $\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4}$ und $\frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{2}$. Somit bekommen wir:

$$\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{3}\cdot\frac{\overline{1}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{3}\cdot\overline{4} + \overline{2} = \overline{14} = \overline{4}.$$

(c) Wegen $2022 = 2\cdot 1011$ und der Assoziativität der Multiplikation gilt

$$\overline{4}^{2022} = (\overline{4}^2)^{1011}.$$

Hierbei ist $\overline{4}^2 = \overline{1}$ das Einselelement in $\mathbb{F}_5$. Mit Induktion zeigt man, dass $\overline{1}^n = \overline{1}$ ist für jede natürliche Zahl n. Inbesondere folgt daraus

$$\overline{4}^{2022} = (\overline{4}^2)^{1011} = \overline{1}.$$

3. **Körper.** Beweise für beliebige $a, b \in \mathbb{F}_3$ die Gleichung

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3.$$

Solution: Wir benutzen die verallgemeinerte binomische Formel und erhalten

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Es gilt $0 = 3$ in $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Damit folgt die Behauptung.

4. **Lineare Gleichungen.** Fixiere $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Bestimme, wann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

mindestens eine Lösung hat. Beschreibe in diesem Fall seine Lösungsmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Solution: Wir vereinfachen die erweiterte Matrix des Systems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1/2 & b_2 \\ 4 & -1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1/2 & b_2 \\ 4 & -1 & 0 & b_3 \\ 0 & 7 & -2 & b_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1/2 & -b_2 \\ 4 & -1 & 0 & b_3 \\ 0 & 7 & -2 & b_1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1/2 & -b_2 \\ 0 & 7 & -2 & b_3 + 4b_2 \\ 0 & 7 & -2 & b_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1/2 & -b_2 \\ 0 & 7 & -2 & b_3 + 4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - b_3 - 4b_2 \end{array}\right)$$

Ein äquivalentes System ist also:

$$\begin{cases} x - 2y + \frac{1}{2}z & = & -b_2 \\ 7y - 2z & = & b_3 + 4b_2 \\ 0 & = & b_1 - b_3 - 4b_2 \end{cases}$$

Falls $b_1 - b_3 - 4b_2 \neq 0$ ist, dann hat das System keine Lösung. Falls $b_1 - b_3 - 4b_2 = 0$ ist, dann ist die Lösungsmenge

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 4a - b_3,\ z = -2(b_2 + 2b_3 - 7a),\ x = a,\ a \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. **Körper.** Sei $(k, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper und sei $\alpha \in K$, sodass die Gleichung $x^2 = \alpha$ in k keinen Lösungen hat. Sei τ das formale Symbol ausserhalb von k, sodass $\tau^2 = \alpha \in k$. Zeige, dass die Menge

$$k[\tau] = \{a + b\tau \mid a, b \in k\}$$

mit den Operationen

$$\begin{array}{cccc} + : & k[\tau] \times k[\tau] & \to & k[\tau] \\ & (a + b\tau, c + d\tau) & \mapsto & a + c + (b + d)\tau \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & k[\tau] \times k[\tau] & \to & k[\tau] \\ & (a + b\tau, c + d\tau) & \mapsto & ac + \alpha bd + (bc + ad)\tau \end{array}$$

als Addition und Multiplikation, und mit $0 + 0\tau$ als additiv neutrales Element 0 und $1 + 0\tau$ als multiplikativ neutrales Element 1 ein Körper ist.

Gebe auch explizite Beispiele für diese Konstruktion an.

Solutions: Aus einfachen Rechnungen folgt, dass $0 + 0\tau$ das neutrale Element der Addition und $1 + 0\tau$ das neutrale Element der Multiplikation ist. Wir überlassen diese dem Lesenden. Da k abgeschlossen unter seinen Operationen ist, folgt aus der Funktionsvorschrift von $+$ und $\cdot$, dass diese ebenfalls in $k[\tau]$ abgeschlossen sind.

Als Nächstes beweisen wir die Existenz eines additiv inversen Elements. Für jedes $x = a + b\tau \in k[\tau]$ gilt

$$(-1 + 0\tau) \cdot x = -a + (-b)\tau \in k$$

und

$$x + (-1) \cdot x = 0 + 0\tau.$$

Jetzt zeigen wir die Existenz eines multiplikativ inversen Elements. Sei dafür $x = a + b\tau \in k[\tau] \setminus \{0 + 0\tau\}$ and $x' = a - b\tau \in k[\tau]$. Bemerke, dass aus $a + b\tau \neq 0 + 0\tau$ schon $\neg(a = 0 \wedge b = 0)$ folgt. Wenn $b = 0$ ist, dann ist $\frac{1}{a} + 0\tau$ das multiplikativ inverse Element von x. Nehme nun also an, dass $b \neq 0$. Daraus folgt auch $x' \neq 0$, da andererseits $\tau = \frac{a}{b} \in k$ gelten müsste, was der annahme entspricht, dass τ ausserhalb von k ist. Jetzt gilt $xx' = a^2 - b^2\alpha \in k$. Wir berechnen

$$\frac{1}{x} = \frac{x'}{xx'} = \frac{a - b\tau}{a^2 - b^2\alpha} = \frac{a}{a^2 - b^2\alpha} - \frac{b}{a^2 - b^2\alpha}\tau \in k[\tau].$$

Das ist das multiplikativ inverse Element von x.

Wir überlassen dem Leser, die Assoziativität von $+$ und $\cdot$ sowie die Distributivität zu überprüfen, welche aus elementaren Rechnungen folgen.

6. **Körper.** Sei k ein endlicher Körper.

(a) Sei S die Summe aller Elemente von k. Zeige, dass $S = 0$ ist genau dann, wenn k mehr als 2 Elemente besitzt.

Hinweis: Welches sind die Eigenschaften der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} m_b: & k & \to & k \\ & x & \mapsto & b \cdot x \end{array}$$

für $b \in k^* = k \smallsetminus \{0\}$?

Solution: Sei $b \in k^\times$. Für die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} m_b: & k & \to & k \\ & x & \mapsto & b \cdot x \end{array}$$

ist $m_{b^{-1}}$ eine Rechts- und Linksinverse, da

$$\begin{aligned} m_b \circ m_{b^{-1}}(x) &= m_b(b^{-1} \cdot x) = (b \cdot b^{-1}) \cdot x = x \\ m_{b^{-1}} \circ m_b(x) &= m_{b^{-1}}(b \cdot x) = (b^{-1} \cdot b) \cdot x = x. \end{aligned}$$

Also ist m_b bijektiv. Damit erhalten wir für $b \in k^*$

$$b \cdot S = b \cdot \sum_{x \in k} x = \sum_{x \in k} b \cdot x = \sum_{y \in k} y = S,$$

wobei die Bijektivität von m_b für die letzte Gleichheit benutzt wurde. Daraus folgt

$$(1 - b) \cdot S = 0.$$

Falls k mehr als zwei Elemente hat existiert ein $b \in k^\times \smallsetminus \{1\}$, für welches die obige Gleichung gilt. Da $b \neq 1$ ist, muss $S = 0$ sein. Wenn k genau zwei Elemente hat, muss es schon der Körper $(\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1) \cong \mathbb{F}_2$ sein (Überprüfe das!). Dann ist $S = 0 + 1 = 1$.

(b) Sei $M = \prod_{x \in k^*} x$ das Produkt aller von Null verschiedenen Elemente von k. Zeige, dass $M = -1$.

Tipp: Betrachte die Abbildung $k^* \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in k^*$.

Solution: Die Abbildung $k^* \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in k^*$ ist bijektiv und hält die Punkte $\{\pm 1\}$ fest. In anderen Worten ist für $x \in k^\times$ die Inverse x^{-1} gleich x genau dann wenn $x \in \{\pm 1\}$. Wir können das endliche Produkt umordnen und jedes $x \in k^\times$ neben sein Inverses schreiben. Dadurch erhalten wir

$$M = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 = -1.$$