Musterlösung Serie 4

1. Sei $m \in \mathbb{R}$. Beschreibe die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von m:

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

Wann ist die Lösungsmenge S ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$? Gebe eine geometrische Interpretation für S in Abhängigkeit von m an.

Solution: Wir benutzen das Gaußsche Eliminationsverfahren. Wir lassen die erste Zeile R_1 gleich und ersetzen die zweite Zeile R_2 durch $R_2 - mR_1$. Wir erhalten das äquivalente System:

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ (4 - m^2)y &= 6 + 3m = 3(m+2) \end{cases}$$

Die Lösungsmenge hängt von m ab:

- Falls $m \notin \{\pm 2\}$ ist, so ist $4 - m^2$ ungleich 0. Darum ist,

$$y = \frac{3(m+2)}{4-m^2} = \frac{3(m+2)}{(2+m)(2-m)} = \frac{3}{2-m}$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir

$$x = \frac{6}{m-2}.$$

Dementsprechend hat das Gleichungssystem in diesem Fall die eindeutige Lösung $(\frac{-6}{2-m}, \frac{3}{2-m})$. Die geometrische Erklärung ist, dass sich die beiden durch $x + my = -3$ und $mx + 4y = 6$ definierten Geraden in diesem Punkt treffen.

- Falls $m = 2$ ist, vereinfacht sich die zweite Gleichung zu $0 = 12$. Dementsprechend hat das Gleichungssystem keine Lösung. Geometrisch bedeutet dies, dass die beiden Geraden in diesem Fall parallel sind.

- Wenn $m = -2$ ist, vereinfacht sich die zweite Gleichung zu $0 = 0$. Sodann ist das Gleichungssystem äquivalent zu $x = -3 - my$. Deswegen gilt

$$S = \{(-3 - my, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Die geometrische Interpretation ist, dass die beiden Geraden in diesem Fall identisch sind.

In keinem der Fälle ist $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum, da sie nie den Nullpunkt (0,0) enthält.

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegeben Vektorräume? Was passiert, wenn in (b) und (c) der Körper $\mathbb{R}$ durch den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird?

   (a) $S_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$

   (b) $S_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

   (c) $S_3 := \{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

   Solution:

   (a) Als Lösungmenge eines homogenen Linearen Gleichungssystems ist S_1 ein Untervektorraum.

   (b) Die Gleichung $x_1^2 + x_2^4 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nur durch $x_1 = x_2 = 0$ erfüllt. Daher ist $S_2 = \{(0,0)\}$ und somit ein Untervektorraum. Für den Körper $\mathbb{F}_2$ sieht es anders aus: für alle $\lambda \in \mathbb{F}_2$ gilt

   $$\lambda^2 = \lambda,$$

   und daher ist die S_2 definierende Gleichung über $\mathbb{F}_2$ äquivalent zu $x_1 + x_2 = 0$. Als Lösungsmenge eines homogenen linearen GLS ist S_2 auch in diesem Fall ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^2$.

   (c) Die Menge S_3 ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, da z.B. $(1,1)$ enthalten ist, das skalare Vielfache

   $$(-1) \cdot (1,1) = (-1,-1)$$

   jedoch nicht (das Quadrat einer reellen Zahl ist immer nicht-negativ).

   Über $\mathbb{F}_2$ nutzen wir erneut, dass $\lambda^2 = \lambda$ gilt. Für beliebige $x, y \in \mathbb{F}_2$ setzen wir

   $$\lambda = y, \; \mu = x - y.$$

   Dann ist $(\mu + \lambda, \lambda) = (x, y)$, also ist S_3 der gesamte Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$, also inbesondere ein Untervektorraum.

3. Sei K ein Körper, in dem $1 + 1 \neq 0$ gilt und betrachte die Menge

   $$V = K^K = \mathrm{Abb}(K, K) := \{f : K \to K\}.$$

   Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies mit punktweiser Addition, d.h. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in K$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in K$ ein Vektorraum ist.

Sei jetzt

$$V_{even} := \{f : K \to K \mid f(-x) = f(x)\, \forall x \in K\},$$
$$V_{odd} := \{f : K \to K \mid f(-x) = -f(x)\, \forall x \in K\}.$$

Zeige, dass V_{even} und V_{odd} Untervektorräume von V sind. Beweise ausserdem, dass

$$V_{even} + V_{odd} := \{v + w \mid v \in V_{even},\, w \in V_{odd}\} = V$$

und $V_{even} \cap V_{odd} = \{0\}$.

Solution: Zuerst bemerken wir, dass die konstante Nullfunktion in beiden Mengen enthalten ist, also sind V_{even} und V_{odd} nicht-leer. Betrachte nun $f, g \in V_{even}$ und $a \in K$. Dann gilt

$$\forall x \in K: \; (f + a \cdot g)(-x) = f(-x) + a \cdot g(-x) = f(x) + a \cdot g(x) = (f + a \cdot g)(x).$$

Also ist $f + a \cdot g \in V_{even}$ für alle $f, g \in V_{even}$ und alle $a \in K$. Dies beweist, dass V_{even} ein Untervektorraum von V ist.

Betrachte nun analog $f, g \in V_{odd}$ und sei $a \in K$. Dann gilt

$$(f + a \cdot g)(-x) = -f(x) - a \cdot g(x) = -(f + a \cdot g)(x).$$

Also ist V_{odd} ein Untervektorraum von V.

Sei nun $f \in V_{odd} \cap V_{even}$. Dann gilt für alle $x \in K$

$$-f(x) = f(-x) = f(x),$$

woraus nun $f(x) = 0$ für alle $x \in K$, da $1 \neq -1$ ist. Die letzte Gleichung ist genau dann war, wenn $1 + 1 \neq 0$.

Es verbleibt zu zeigen, dass $V_{even} + V_{odd} = V$ ist. Sei dazu $f \in V$. Wir definieren

$$f_{even}(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
$$f_{odd}(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Einfache Rechnungen zeigen $f_{even} \in V_{even}$ und $f_{odd} \in V_{odd}$ und

$$f(x) = f_{even}(x) + f_{odd}(x).$$

Daraus folgt $V_{even} + V_{odd} = V$.

4. Seien ∞ und $-\infty$ zwei verschiedene Objekte, beide nicht in $\mathbb{R}$ enthalten. Wir definieren Addition und Multiplikation auf $V := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ wie folgt: in $\mathbb{R}$

nutzen wir die herkömliche Addition und Multiplikation. Für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & \text{falls } t < 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0, \\ \infty & \text{falls } t > 0, \end{cases} \qquad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t < 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0, \\ -\infty & \text{falls } t > 0, \end{cases}$$
$$t + \infty = \infty + t = \infty, \qquad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty.$$

Zuletzt sei

$$\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty), \quad \infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = 0.$$

Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$? *Solutions*: Es gilt $(1-2)\cdot\infty = -1\cdot\infty = -\infty$, aber auch $(1\cdot\infty) + (-2\cdot\infty) = \infty + (-\infty) = 0 \neq -\infty$. Also ist Axiom (V8) verletzt, weswegen V kein Vektorraum über $\mathbb{R}$ sein kann..

5. Sei X eine Menge und P die Menge aller Teilmengen von X. Für alle $A, B \in P$ und $\lambda \in \mathbb{F}_2$ definiere

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$\lambda \cdot A := \begin{cases} \varnothing & \text{für } \lambda = 0, \\ A & \text{für } \lambda = 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $(P, \triangle, \cdot, \varnothing)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

Solution: Im Folgenden seien $A, B, C \in P$ und $s, t \in \mathbb{F}_2$. Wir überprüfen nun die Axiome, denen ein Vektorraum genügen muss.

(V1) Die Venn Diagramme geben eine gewisse Intuition für die Assoziativität der Addition:

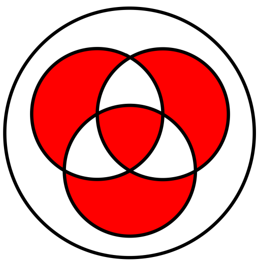

Abbildung 1: Symmetrische Differenz dreier Mengen

Eine Skizze ist aber noch kein Beweis! Sei nun $x \in A\triangle(B\triangle C)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& x \in A\triangle(B\triangle C) \\
\Leftrightarrow\quad & (x \in A \wedge x \notin B\triangle C) \vee (x \notin A \wedge x \in B\triangle C) \\
\Leftrightarrow\quad & \big[x \in A \wedge \neg\big((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C)\big)\big] \\
& \vee \big[x \notin A \wedge \big((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C)\big)\big]
\end{aligned}$$

Wir vereinfachen die beiden in eckige Klammern eingefassten Teile des letzten Ausdrucks separat. Der zweite Teil kann durch ausmultiplizieren des logischen "und " geschrieben werden als

$$(x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C).$$

Für den ersten Teil gilt:

$$\begin{aligned}
& x \in A \wedge \neg\big((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in A \wedge \big(\neg(x \in B \wedge x \notin C) \wedge \neg(x \notin B \wedge x \in C)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in A \wedge \big((x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \notin C)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in A \wedge \big((x \notin B \wedge x \in B) \vee (x \notin B \wedge x \notin C) \\
& \vee (x \in C \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \notin C)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in A \wedge \big((x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \in B)\big) \\
\Leftrightarrow\quad & (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \in B)
\end{aligned}$$

Die Äquivalenz der dritten und der vierten Zeile genauso wie jene der sechsen und siebten Zeile ist durch die distributive Eigenschaft des logischen "und " mit dem logischen "oder" begründet.
Druch das Zusammenfügen der beiden Teile erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& x \in A\triangle(B\triangle C) \\
\Leftrightarrow\quad & (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \\
& \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \in B)
\end{aligned}$$

Diese Aussage ist jetzt symmetrisch in A, B und C. Indem wir die genau gleichen Schritte für $(A\triangle B)\triangle C$ durchführen, erhalten wir also den gleichen Ausdruck und folgern

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C.$$

Die Symmetrie in A, B und C ist die logische Übersetzung des Venn Diagramms.

(V2) Es gilt

$$\varnothing + A = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A.$$

(V3) Es gilt
$$A + A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \varnothing.$$

(V4) Es gilt
$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B + A.$$

(V5) Es gilt
$$\begin{aligned}(0 \cdot 0) \cdot A &= 0 \cdot A = \varnothing = 0 \cdot \varnothing = 0 \cdot (0 \cdot A)\\ (0 \cdot 1) \cdot A &= 0 \cdot A = \varnothing = 0 \cdot (1 \cdot A)\\ (1 \cdot 1) \cdot A &= 1 \cdot A = A = 1 \cdot (1 \cdot A).\end{aligned}$$

Die anderen Fälle folgen direkt aus der Kommutativität von $\mathbb{F}_2$.

(V6) Ist per Definition erfüllt.

(V7) Es gilt
$$\begin{aligned}0 \cdot (A + B) &= \varnothing = \varnothing + \varnothing = 0 \cdot A + 0 \cdot B\\ 1 \cdot (A + B) &= A + B = (1 \cdot A) + (1 \cdot B).\end{aligned}$$

(V8) Es gilt
$$\begin{aligned}(0 + 0) \cdot A &= 0 \cdot A = \varnothing = \varnothing + \varnothing = 0 \cdot A + 0 \cdot A\\ (1 + 0) \cdot A &= 1 \cdot A = A = A + \varnothing = 1 \cdot A + 0 \cdot \varnothing\\ (1 + 1) \cdot A &= 0 \cdot A = \varnothing = A + A = 1 \cdot A + 1 \cdot A.\end{aligned}$$

6. Sei V ein K-Vektorraum und seien V_1, V_2, V_3 Untervektorräume, von denen keiner in einem anderen enthalten ist. Entscheide, mit Beweis, ob die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ immer, oder manchmal, oder nie ein Untervektorraum ist.

   Tipp: Variiere den Körper K, um Beispiele zu erhalten.

   Solution: Betrachte K^2 und die Unterräume
$$V_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ V_3 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   Wenn $K = \mathbb{R}$ ist, dann gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_3$. Allerdings ist ihre Summe $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht in $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ enthalten. Dies ist also ein Beispiel, in der die Vereinigung kein Untervektorraum ist.

   Sei nun $K = \mathbb{F}_2$. Dann ist
$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dies ist schon K^2 und dementsprechend ein Untervektorraum.

Multiple Choice questions. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der gegebenen Vektorräume

✓ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, 2x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Aus der Vorlesung wissen wir, dass Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme Untervektorräume sind.

○ $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Diese Menge enthält $(0, 0, 0)$ nicht und ist damit kein Untervektorraum.

○ $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
Dies ist kein Untervektorraum, da die Multiplikation mit einem negativen Skalar λ die Ungleichheit umkehrt. Also ist für ein Element (x_1, x_2) aus der Menge $\lambda(x_1, x_2)$ nicht mehr in der Menge enthalten.

✓ $\{(0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
Dies ist ein Untervektorraum, da für beliebige $v = (0, x, 2x, 3x)$, $w = (0, y, 2y, 3y)$ aus der Menge und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$v + \lambda w = (0, x + \lambda y, 2x + 2\lambda y, 3x + 3\lambda y) = (0, z, 2z, 3z),$$

wobei $z = x + \lambda y$ ist. Also ist $v + \lambda w$ in der Menge enthalten.

○ $\{(x^4, x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
Dies ist kein linearer Unterraum. Bemerke, dass $v := (1, 1, 1, 1)$ in der Menge enthalten ist, nicht aber $2v$, da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $2 = x^4 = x^3 = x^2 = x$.

Frage 2. Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen. Die Addition auf $\mathbb{R}^2_+$ sie folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Deifnitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
- $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}$

- $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}$

Dann ist $\mathbb{R}^2_+$ ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar gemäss der

○ Erste Definition
Nein. Wenn $\lambda < 0$ ist, dann gilt $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2_+$

○ Zweite Definition
Nein, die Distributivität $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ ist verletzt.

✓ Dritte Definition
Dies erfüllt alle Axiome.