Musterlösung Serie 5

1. **Polynome.** Gegeben sind die vier Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + x^2 \\ p_2(x) &= x^2 - 2x - 4 \\ p_3(x) &= 3x + 4 \\ p_4(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

   (a) Schreiben Sie das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linerakombination der Polynome p_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

   (b) Berechnen Sie das Erzeugnis $\mathrm{Sp}(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Lösung:

   (a) Es gilt
$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2p_1(x) + p_2(x) + p_4(x).$$

   (b) Wir bemerken zuerst, dass $-2p_3(x) + 3p_4(x) = 1$ ist. Des Weiteren gilt $3p_3(x) - 4p_4(x) = x$. Dies benutzend erhalten wir

$$x^2 = p_2(x) + 2\left(3p_3(x) - 4p_4(x)\right) + 4\left(-2p_3(x) + 3p_4(x)\right)$$

   und

$$x^3 = p_1(x) - p_2(x) - 2\left(3p_3(x) - 4p_4(x)\right) - 4\left(-2p_3(x) + 3p_4(x)\right)$$

   Es folgt $\{1, x, x^2, x^3\} \subset \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle$, also ist

$$P_3(\mathbb{R}) = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle \subset \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle .$$

   Weil der Grad eines Elements von $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\rangle$ nicht grösser als der Grad der Erzeugenden sein kann(Mehr Details in der Lösung von Aufgabe 5), folgt

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)) \subseteq P_3(\mathbb{R}) := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leqslant 3\} \\ &= \mathrm{Sp}(1, x, x^2, x^3). \end{aligned}$$

   Zussamen gilt
$$\mathrm{Sp}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)) = P_3(\mathbb{R}).$$

2. **Dimension 2.** Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, sodass $w \neq \alpha v$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

   (a) Zeige $\mathrm{Sp}(v, w) = \mathbb{R}^2$.

   (b) Zeige, dass $\{(0,0)\}$, $\mathrm{Sp}(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, und $\mathbb{R}^2$ die einzigen Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind.

Solution:

(a) Wir schreiben

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Wir wollen zeigen, dass für einen beliebigen Vektor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existiert, sodass

$$xv + yw = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

In anderen Worten müssen wir zeigen, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

immer eine Lösung (x, y) hat. Wir benutzen das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Wenn $a = 0$ ist, vertauschen wir die erste Zeile R_1 mit der zweiten Zeile in der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & \alpha \\ b & d & \beta \end{array}\right).$$

Da w nicht proportional zu v ist, muss $b \neq 0$ gelten.

Deswegen nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $a \neq 0$ ist.

Wir vertauschen R_2 mit $R_2 - \frac{b}{a} R_1$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & \alpha \\ 0 & d - \frac{b}{a}c & \beta - \frac{b}{a}\alpha \end{array}\right).$$

Ausserdem ist $d - \frac{b}{a}c \neq 0$, sonst wäre $w = \frac{c}{a}v$. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir

$$c' := \frac{c}{a}, \quad \alpha' := \frac{\alpha}{a}, \quad \beta' := \frac{\beta - \frac{b}{a}\alpha}{d - \frac{b}{a}c}.$$

Nach unser Rechnung korrespondiert die erweiterte Gleichung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c' & \alpha' \\ 0 & 1 & \beta' \end{array}\right)$$

zu unserem Gleichungssystem. Eine Lösung ist $x = \alpha' - c'\beta'$, $y = \beta'$, und damit sind wir fertig.

(b) Die drei angegebenen Arten von Mengen sind offensichtlich Untervektorräume. Nehme an, dass ein Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert, der nicht eine dieser Formen hat. Dann ist $U \neq \{(0,0)\}$ und enthält 2 linear unabhängige Vektoren. Aber dann folgt aus (a) schon $U = \mathbb{R}^2$, was einen Widerspruch darstellt.

3. **Unterräume.** Sind + und $\cap$ von Unterräumen zueinander distributiv, das heißt, gelten für alle Unterräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?

$$U \cap (V_1 + V_2) = (U \cap V_1) + (U \cap V_2)$$
$$U + (V_1 \cap V_2) = (U + V_1) \cap (U + V_2)$$

Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

Für zwei Untervektorräume V_1 und V_2 eines Vektorraums V gilt

$$V_1 + V_2 = \{u + v \mid u \in V_1,\, v \in V_2\}.$$

Lösung: Für jedes $i = 1, 2$ gilt $V_i \subset V_1 + V_2$ und somit $U \cap V_i \subset U \cap (V_1 + V_2)$ .Da $U \cap (V_1 + V_2)$ ein Untervektorraum ist, folgt

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \subset U \cap (V_1 + V_2)\,.$$

Weiter gilt $V_1 \cap V_2 \subset V_i$ und somit $U + (V_1 \cap V_2) \subset U + V_i$, und daher

$$U + (V_1 \cap V_2) \subset (U + V_1) \cap (U + V_2)\,.$$

Dagegen ist die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen in beiden Fällen falsch: für die Unterräume $U := \langle(1,1)\rangle$ und $V_1 := \langle(1,0)\rangle$ und $V_2 := \langle(0,1)\rangle$ von K^2 gilt nämlich $U \cap V_1 = U \cap V_2 = V_1 \cap V_2 = 0$ und $U + V_1 = U + V_2 = V_1 + V_2 = K^2$ und somit

$$(U \cap V_1) + (U \cap V_2) = 0 + 0 = 0 \neq U = U \cap K^2 = U \cap (V_1 + V_2)$$

sowie

$$U + (V_1 \cap V_2) = U + 0 = U \neq K^2 = K^2 \cap K^2 = (U + V_1) \cap (U + V_2)$$

4. **Vektorräume und Gleichungen.** Sei K ein Körper. Fixiere $x \in K^n$ und $b \in K^m$. Definiere

$$U := \{A \in M_{m \times n}(K) \mid A \cdot x = b\}.$$

Für welche Werte von x und b ist $U \subseteq M_{m \times n}(K)$ ein Untervektorraum?

Solution: Wir schreiben im Folgenden $U = U_{x,b}$ um die Abhängigkeit von den Parametern hervorzuheben.

Nehme zuerst an, dass $b \neq 0$. Dann ist $0 \notin U_{x,b}$, also kann $U_{x,b}$ kein Untervektorraum sein. Also ist $b = 0$ eine notwendige Bedingung dafür, dass $U_{x,b}$ ein Untervektorraum ist. Sei also jetzt $b = 0$. Wir schreiben $U_{0,x} = U_x$. Das korrespondierende Gleichungssystem heisst homogen.

Für jedes $xinK^n$ ist die Nullmatrix ist in U_x enthalten, deswegen ist $U_x \neq \varnothing$. Also ist (UVR1) für alle U_x erfüllt. Weiter gilt für $A, B \in U_x$

$$(A + B) \cdot x = A \cdot x + B \cdot x = 0.$$

Also genügt U_x auch (UVR2). Des Weiteren gilt für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A \in U_x$

$$(\alpha A) \cdot x = \alpha(A \cdot x) = 0.$$

Also genügt U_x auch (UVR3).

Damit haben wir bewiesen $U_{x,b}$ ein Untervektorraum genau dann ist, wenn $b = 0$.

5. **Polynome.** Zeige, dass $K[x]$ *nicht* endlichdimensional über K ist.

Solution: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Nehme also an, dass $K[x]$ endlichdimensional über K ist. Dann existiert eine endliche Menge

$$E := \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r\} \subseteq K[x],$$

sodass $\mathrm{Sp}(E) = K[x]$. In anderen Worten existieren für jedes $q \in K[x]$ Koeffizienten $a_1, \ldots, a_r \in K$, sodass

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i(x).$$

Sei $D = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}\{\deg(p_i)\}$. Da für beliebige $p, p' \in K[x]$ gilt

$$\deg(p + p') \leqslant \max\{\deg(p), \deg(p')\},$$

folgt durch Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jedes $m_1, \ldots, m_n \in K[x]$ die Ungleichung

$$\deg(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\deg(m_i)\}$$

erfüllt ist. Also gilt für beliebige $a_1, \ldots, a_r \in K$ die Ungleichung

$$\deg\left(\sum_{i=1}^{r} a_i p_i(x)\right) \leqslant D.$$

Wir wählen nun ein $q \in K[x]$ mit $\deg(q) > D$. Dann existieren nach unserer Annahme $a_1, \dots, a_r \in K$, sodass $q(x) = \sum_{i=1}^r a_i p_i(x)$. Dies ergibt aber einen Widerspruch, da dann

$$\deg(q) = \deg\left(\sum_{i=1}^r a_i p_i(x)\right) \leqslant D < \deg(q)$$

gelten muss.

6. **Folgen.**

   (a) Sei K_0^∞ die Menge der Folgen mit endlichem Träger, das heisst

   $$K_0^\infty = \{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}\, a_i \in K \wedge \exists N \geqslant 0 : \forall n \geqslant N\, a_n = 0\}.$$

   Gebe eine erzeugende Teilmenge $E \subsetneq K_0^\infty$ an, die bezüglich der Inklusion so klein wie möglich ist.

   (b) Wiederhole dies für die Menge

   $$K_{cst}^\infty := \{(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}\, a_i \in K \wedge \exists c \in K \exists N \geqslant 0 : \forall n \geqslant N\, a_n = c\},$$

   der irgendwann konstanten Funktionen.

Solution:

(a) Eine minimale erzeugende Teilmenge ist zum Beispiel gegeben durch

$$\{a^{(i)} = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}, \dots) \mid 0 \leqslant i\},$$

mit

$$a_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist offensichtlich eine Teilmenge von K_0^∞. Als nächstes überprüfen wir, dass es auch erzeugend ist. Betrachte eine Folge

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in K_0^\infty$$

und sei $N \geqslant 0$, sodass $a_n = 0\, \forall n \geqslant N$. Dann ist

$$a = a_0 a^{(0)} + a_1 a^{(1)} + \dots + a_{N-1} a^{(N-1)}.$$

Da alle Folgen mit endlichem Träger so geschrieben werden können, ist $\{a^{(i)} \mid i \geqslant 0\}$ eine erzeugende Teilmenge von K_0^∞.

Betrachte nun eine echte Teilmenge $B \subsetneq \{a^{(i)} \mid i \geqslant 0\}$. Dann existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{(r)} \notin B$. Dementsprechend ist $a^{(r)} \in K_0^\infty \setminus \mathrm{Sp}(B)$, weswegen B keine erzeugende Teilmenge von K_0^∞ ist. Damit ist B minimal.

(b) In diesem Fall ist eine kleinste erzeugende Menge gegeben durch

$$\{b^{(i)} = (b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_n^{(i)}, \dots) \mid 0 \leqslant i\},$$

wobei

$$b_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leqslant j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Ein anderes Beispiel ist die in (a) beschriebene Menge, zu der wir das Element

$$(1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots).$$

hinzufügen.

Wir zeigen zunächst, dass $\{b^{(i)} \mid i \geqslant 0\}$ eine erzeugende Teilmenge ist. Betrachte

$$a = (a_0, a_1, a_2, \cdots) \in K_{cst}^{\infty}$$

und sei $N \geqslant 0$, sodass $a_n = c \in K$, $\forall n \geqslant N$ gilt. Wir definieren

$$c_i := \begin{cases} a_0, & i = 0 \\ a_i - a_{i-1}, & 1 \leqslant i \leqslant N \end{cases}$$

Dann ist

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant N} c_i b^{(i)} = b,$$

und deswegen ist B eine erzeugende Teilmenge von K_0^{∞}. Betrachte nun eine echte Teilmenge $B \subsetneq \{b^{(i)} \mid i \geqslant 0\}$. Dann ist $b^{(r)} \notin B$ für ein $r \geqslant 0$. Wir wollen zeigen, dass $b^{(r)}$ nicht als Linearkombination der Elemente $\{\dots, b^{(r-1)}, b^{(r+1)}, \dots\}$ geschrieben werden kann. Nehme dafür nicht-negative Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in K^{\times}$, wobei $r \neq N \geqslant 0$ beliebig ist. Setze $\alpha_i = 0$ für $i > N$ uns definiere

$$d := \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i b^{(i)} + \sum_{r+1}^{N} \alpha_i b^{(i)}.$$

Der konstante Teil der Folge d beginnt ab der Stelle N (und nicht davor, da alle $\alpha_i \neq 0$ sind.). Da der konstante Teil von $b^{(r)}$ ab der r-ten Stelle beginnt, können wir es also nicht als Linearkombination der anderen $b^{(i)}$ schreiben. In anderen Worten gilt

$$\mathrm{Sp}(B) \subsetneq K_{cst}^{\infty}$$

für alle $B \subsetneq \{b^{(i)} \mid i \geqslant 0\}$.